

# Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance

Damien Lambertson

Bernard Lapeyre



## Avant-Propos

Pour cette seconde édition, nous avons apporté quelques modifications au texte primitif. Les premières concernent la correction d'erreurs plus ou moins importantes. L'erreur la plus sérieuse était une affirmation fautive concernant les intégrales stochastiques (voir le résumé des propriétés de l'intégrale stochastique à la fin de la section 4.1 du chapitre 3 et l'exercice 15, qui nous a été inspiré par Marc YOR).

Nous avons ajouté quelques sujets de problèmes à la fin du chapitre 4. Ces problèmes permettent d'introduire et de traiter divers exemples d'options exotiques.

Nous avons complété la bibliographie de quelques titres récents, en particulier sur le thème des marchés incomplets, le chapitre 7 ne faisant qu'effleurer le sujet.

Enfin, nous avons réécrit les programmes de simulation et d'analyse numérique dans le langage C qui se répand de plus en plus dans les banques.

Nous remercions les collègues qui nous ont signalé des erreurs ou des coquilles. Il en reste hélas sûrement et nous espérons que les lecteurs de cette nouvelle édition voudront bien nous les signaler.

Damien Lambertson et Bernard Lapeyre.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1 Le problème des options . . . . .	9
2 La notion d'arbitrage et la relation de parité call-put . . . . .	10
3 Le modèle de Black-Scholes et ses extensions . . . . .	11
4 Plan du livre . . . . .	11
5 Remerciements . . . . .	12
<b>1 Modèles discrets</b>	<b>13</b>
1 Le formalisme des modèles discrets . . . . .	13
1.1 Les actifs financiers . . . . .	13
1.2 Les stratégies . . . . .	13
1.3 Stratégies admissibles et arbitrage . . . . .	15
2 Martingales et arbitrages . . . . .	16
2.1 Martingales et transformées de martingales . . . . .	16
2.2 Marchés financiers viables . . . . .	17
3 Marchés complets et évaluation des options . . . . .	19
3.1 Marchés complets . . . . .	19
3.2 Evaluation et couverture des actifs conditionnels dans les marchés complets . . . . .	21
3.3 Première approche des options américaines . . . . .	22
4 Problème corrigé : le modèle de Cox, Ross et Rubinstein . . . . .	23
<b>2 Problème d'arrêt optimal et options américaines</b>	<b>27</b>
1 Notion de temps d'arrêt . . . . .	27
2 Enveloppe de Snell . . . . .	28
3 Décomposition des surmartingales . . . . .	30
4 Enveloppe de Snell et chaînes de Markov . . . . .	32
5 Application aux options américaines . . . . .	32
5.1 Exercice et couverture des options américaines . . . . .	33
5.2 Options américaines et options européennes . . . . .	34
6 Exercices . . . . .	35
<b>3 Mouvement brownien et équations différentielles stochastiques</b>	<b>39</b>
1 Généralités sur les processus à temps continu . . . . .	39
2 Le mouvement brownien . . . . .	41
3 Martingales à temps continu . . . . .	42
4 Intégrale stochastique et calcul d'Itô . . . . .	44
4.1 Construction de l'intégrale stochastique . . . . .	45
4.2 Calcul d'Itô . . . . .	50

4.3	Exemples d'utilisation de la formule d'Itô . . . . .	51
4.4	Formule d'Itô multidimensionnelle . . . . .	54
5	Equations différentielles stochastiques . . . . .	55
5.1	Théorème d'Itô . . . . .	56
5.2	Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	58
5.3	Equations différentielles stochastiques à valeurs vectorielles . . . . .	59
5.4	Propriété de Markov des solutions d'équations différentielles stochastiques . . . . .	59
6	Exercices . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Modèle de Black et Scholes</b>	<b>67</b>
1	Description du modèle . . . . .	67
1.1	L'évolution des cours . . . . .	67
1.2	Les stratégies autofinancées . . . . .	68
2	Changement de probabilité. Théorème de représentation des martingales . . . . .	69
2.1	Probabilités équivalentes . . . . .	69
2.2	Théorème de Girsanov . . . . .	70
2.3	Théorème de représentation des martingales browniennes . . . . .	70
3	Evaluation et couverture des options dans le modèle de Black et Scholes . . . . .	71
3.1	Une probabilité sous laquelle $(\tilde{S}_t)$ est une martingale . . . . .	71
3.2	Pricing . . . . .	71
3.3	Couverture des calls et des puts . . . . .	74
4	Options américaines dans le modèle de Black-Scholes . . . . .	75
4.1	Evaluation des options américaines . . . . .	75
4.2	Puts perpétuels, prix critique . . . . .	77
5	Exercices . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Evaluation des options et équations aux dérivées partielles</b>	<b>95</b>
1	Calculs de prix d'options européennes pour les modèles de diffusion . . . . .	95
1.1	Générateur infinitésimal d'une diffusion . . . . .	96
1.2	Calculs d'espérances et équations aux dérivées partielles . . . . .	98
1.3	Le cas du modèle de Black et Scholes . . . . .	100
1.4	Equation aux dérivées partielles sur un ouvert borné et calcul d'espérance	101
2	Résolution numérique des équations paraboliques. . . . .	102
2.1	Localisation . . . . .	102
2.2	La méthode des différences finies . . . . .	104
3	Le problème des options américaines . . . . .	107
3.1	Formulation du problème . . . . .	107
3.2	Le put américain dans le modèle de Black et Scholes . . . . .	109
3.3	La méthode binomiale pour le calcul du put américain . . . . .	113
4	Exercices . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Modèles de taux d'intérêt</b>	<b>117</b>
1	Principes de la modélisation . . . . .	117
1.1	Notion de courbe des taux . . . . .	117
1.2	Courbe des taux en avenir incertain . . . . .	118
1.3	Options sur obligations . . . . .	120
2	Quelques modèles usuels . . . . .	122
2.1	Le modèle de Vasicek . . . . .	122

2.2	Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross . . . . .	124
2.3	Autres modèles . . . . .	127
3	Exercices . . . . .	129
<b>7</b>	<b>Modèles d'actifs avec sauts</b>	<b>133</b>
1	Processus de Poisson . . . . .	133
2	Description de l'évolution de l'actif risqué . . . . .	135
3	Evaluation et couverture des options . . . . .	140
3.1	Les stratégies admissibles . . . . .	140
3.2	Pricing . . . . .	143
3.3	Prix des calls et des puts . . . . .	143
3.4	Couverture des calls et des puts . . . . .	144
4	Exercices . . . . .	147
<b>8</b>	<b>Simulation et algorithmes pour les modèles financiers</b>	<b>149</b>
1	Simulation et modèles financiers . . . . .	149
1.1	La méthode de Monte Carlo . . . . .	149
1.2	Simulation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ . . . . .	150
1.3	Simulation des variables aléatoires . . . . .	150
1.4	Simulation de processus stochastiques . . . . .	152
2	Quelques algorithmes utiles . . . . .	155
2.1	Approximation de la fonction de répartition d'une gaussienne . . . . .	155
2.2	Implémentation informatique de la méthode de Brennan et Schwartz . . . . .	156
2.3	L'algorithme de Cox Ross pour le calcul du prix d'une option américaine . . . . .	157
3	Exercices . . . . .	158
	<b>Appendice</b>	<b>161</b>
1	Variables aléatoires gaussiennes . . . . .	161
1.1	Gaussiennes réelles . . . . .	161
1.2	Vecteurs gaussiens . . . . .	161
2	Espérance conditionnelle . . . . .	162
2.1	Exemples de sous-tribus . . . . .	162
2.2	Propriétés de l'espérance conditionnelle . . . . .	163
2.3	Calculs d'espérances conditionnelles . . . . .	164
3	Théorème de séparation des convexes . . . . .	165
	<b>Bibliographie</b>	<b>167</b>





# Introduction

*Si, à l'égard de plusieurs questions traitées dans cette étude, j'ai comparé les résultats de l'observation à ceux de la théorie, ce n'était pas pour vérifier des formules établies par les méthodes mathématiques, mais pour montrer seulement que le marché, à son insu, obéit à une loi qui le domine : la loi de la probabilité.*

L. BACHELIER, Théorie de la Spéculation (1900)

Le but de ce livre est de fournir une introduction aux techniques probabilistes nécessaires à la compréhension des modèles financiers les plus courants. Les spécialistes de la finance ont en effet recours, depuis quelques années, à des outils mathématiques de plus en plus sophistiqués (martingales, intégrale stochastique) pour la description des phénomènes et la mise au point de méthodes de calcul.

En réalité, l'intervention du calcul des probabilités en modélisation financière n'est pas récente : c'est en tentant de bâtir une "théorie de la spéculation" que Bachelier [Bac00] a découvert, au début du siècle, l'objet mathématique appelé aujourd'hui "mouvement brownien". Mais elle a pris une dimension nouvelle à partir de 1973, avec les travaux de Black-Scholes [BS73] et Merton [Mer73] sur l'évaluation ("pricing" en anglais) et la couverture des options. Depuis, tandis que se développaient les marchés d'options, les méthodes de Black-Scholes et Merton ont été perfectionnées, tant au niveau de la généralité que de la clarté et de la rigueur mathématique et la théorie paraît suffisamment avancée pour tenter de la rendre accessible à des étudiants.

## 1 Le problème des options

Notre exposé est principalement centré sur le problème des options, qui a été le moteur de la théorie et reste l'exemple le plus frappant de la pertinence des méthodes de calcul stochastique en finance. Une option est un titre donnant à son détenteur le droit, et *non l'obligation* d'acheter ou de vendre (selon qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente) une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix fixé d'avance. La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivants :

- la nature de l'option : on parle, suivant la terminologie anglo-saxonne, de *call* pour une option d'achat et de *put* pour une option de vente.
- l'actif sous-jacent, sur lequel porte l'option : dans la pratique, il peut s'agir d'une action, d'une obligation, d'une devise etc.
- le montant, c'est-à-dire la quantité d'actif sous-jacent à acheter ou à vendre.
- l'échéance ou date d'expiration, qui limite la durée de vie de l'option ; si l'option peut être exercée à n'importe quel instant précédant l'échéance, on parle d'option *américaine*, si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance, on parle d'option *européenne*.

- le prix d'exercice, qui est le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

L'option, elle-même, a un prix, appelé la prime. Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé, la prime est donnée par le marché. En l'absence de cotation, le problème du calcul de la prime se pose. Et, même pour une option cotée, il peut être intéressant de disposer d'une formule ou d'un modèle permettant de détecter d'éventuelles anomalies de marché.

Examinons, pour fixer les idées, le cas d'un call européen, d'échéance  $T$ , sur une action, dont le cours à la date  $t$  est donné par  $S_t$ . Soit  $K$  le prix d'exercice. Il est clair que si, à l'échéance  $T$ , le prix  $K$  est supérieur au cours  $S_T$ , le détenteur de l'option n'a pas intérêt à exercer. Par contre, si  $S_T > K$ , l'exercice de l'option permet à son détenteur de réaliser un profit égal à  $S_T - K$ , en achetant l'action au prix  $K$  et en la revendant sur le marché au cours  $S_T$ . On voit qu'à l'échéance, la valeur du call est donnée par la quantité :

$$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0).$$

Pour le vendeur de l'option, il s'agit, en cas d'exercice, d'être en mesure de fournir une action au prix  $K$ , et, par conséquent de pouvoir produire à l'échéance une richesse égale à  $(S_T - K)_+$ . Au moment de la vente de l'option, qu'on prendra pour origine des temps, le cours  $S_T$  est inconnu et deux questions se posent :

1. Combien faut-il faire payer à l'acheteur de l'option, autrement dit comment évaluer à l'instant  $t = 0$  une richesse  $(S_T - K)_+$  disponible à la date  $T$  ? C'est le problème du pricing.
2. Comment le vendeur, qui touche la prime à l'instant  $0$ , parviendra-t-il à produire la richesse  $(S_T - K)_+$  à la date  $T$  ? C'est le problème de la couverture.

## 2 La notion d'arbitrage et la relation de parité call-put

La réponse aux deux questions qui précèdent ne peut se faire qu'à partir d'un minimum d'hypothèses de modélisation. L'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, est que, dans un marché suffisamment fluide, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire qu'il est impossible de faire des profits sans prendre de risques. Nous traduirons cette hypothèse en termes mathématiques dans le chapitre 1. Pour l'instant, nous nous contenterons de montrer comment, à partir de cette simple hypothèse, on peut établir des relations entre les prix d'un call et d'un put européen de même échéance  $T$  et de même prix d'exercice  $K$ , sur une action de cours  $S_t$  à l'instant  $t$ . Nous supposons qu'il est possible d'emprunter ou de placer de l'argent à un taux constant  $r$ .

Désignons par  $C_t$  et  $P_t$  les prix respectifs du call et du put à l'instant  $t$ . En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on a la relation suivante, valable à tout instant  $t < T$  et appelée "relation de parité call-put" :

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Pour faire comprendre la notion d'arbitrage, montrons comment on pourrait réaliser un profit sans risque si on avait, par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

A l'instant  $t$ , on achète une action et un put et on vend un call. Cette opération dégage, à l'instant  $t$ , un profit net égal à

$$C_t - P_t - S_t.$$

Si cette somme est positive, on la place au taux  $r$  jusqu'à la date  $T$ , sinon, on l'emprunte au même taux. A la date  $T$ , deux cas peuvent se présenter :

- $S_T > K$  : alors, le call est exercé, on livre l'action, on encaisse la somme  $K$  et on solde l'emprunt ou le prêt, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :  $K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$ .
- $S_T \leq K$  : alors, on exerce son put et on solde comme précédemment, de sorte qu'on se retrouve encore avec une richesse égale à :  $K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t)$ .

Dans les deux cas, on a réalisé un profit positif sans mise de fond initiale : c'est un exemple d'arbitrage.

On trouvera de nombreux exemples de relations d'arbitrage telles que la relation de parité ci-dessus dans le livre de Cox et Rubinstein [CR85]. Nous ne passerons pas en revue toutes ces relations d'arbitrage, mais nous montrerons comment on peut caractériser mathématiquement les marchés où il n'y a pas d'arbitrage.

### 3 Le modèle de Black-Scholes et ses extensions

Si les raisonnements par arbitrage fournissent de nombreuses relations intéressantes, ils ne sont pas suffisants pour obtenir des formules de prix. Pour cela, on a besoin de modéliser de façon plus précise l'évolution des cours. Black et Scholes ont été les premiers à proposer un modèle conduisant à une formule explicite pour le prix d'un call européen sur une action ne donnant pas de dividendes et à une stratégie de gestion qui, dans le cadre du modèle, permet au vendeur de l'option de se couvrir parfaitement, c'est-à-dire d'éliminer totalement le risque. Le prix du call est, dans le modèle de Black-Scholes, la somme d'argent dont on doit disposer initialement pour pouvoir suivre la stratégie de couverture et produire ainsi exactement la richesse  $(S_T - K)_+$  à l'échéance. De plus, la formule obtenue ne dépend que d'un paramètre non directement observable sur le marché et appelé "volatilité" par les praticiens.

C'est le recours à la notion d'intégrale stochastique pour exprimer les gains et les pertes dans les stratégies de gestion de portefeuille qui permet d'utiliser le calcul stochastique et, en particulier, la formule d'Itô, et conduit à des expressions calculables. De nombreuses extensions des méthodes de Black et Scholes ont été développées ces dernières années. Nous nous efforcerons, à partir d'une étude approfondie du modèle de Black-Scholes sous sa forme la plus simple, de donner au lecteur les moyens de comprendre ces diverses extensions.

### 4 Plan du livre

Les deux premiers chapitres sont consacrés à l'étude des modèles discrets. On y voit le lien entre la notion mathématique de martingale et la notion économique d'arbitrage, la notion de marché complet et l'évaluation des options dans le cadre des marchés complets. Le formalisme adopté est celui de Harrison et Pliska [HP81] et nous avons repris l'essentiel des résultats de [HP81] dans le chapitre 1 en prenant comme exemple le modèle de Cox-Ross-Rubinstein. Le chapitre 2 traite des options américaines à l'aide de la théorie de l'arrêt optimal à temps discret qui relève de méthodes élémentaires et contient toutes les idées à transposer dans le cas continu.

Le chapitre 3 introduit le lecteur aux principales notions de calcul stochastique utilisées dans le modèle de Black-Scholes, qui est étudié en détail au chapitre 4. Ce modèle donne, pour les options européennes, des formules explicites. Mais, pour traiter les options américaines ou faire des calculs dans des modèles plus sophistiqués, on doit avoir recours à des méthodes numériques fondées sur le lien entre évaluation des options et équations aux dérivées partielles

: ces questions font l'objet du chapitre 5.

Le chapitre 6 est une introduction assez succincte aux principaux modèles de taux d'intérêt et le chapitre 7 examine les problèmes d'évaluation et de couverture des options dans le cadre de modèles avec sauts très simples. Dans ces modèles, il n'y a plus de couverture parfaite des options, mais seulement une couverture optimale, en un sens à préciser. De tels modèles, moins optimistes que le modèle de Black-Scholes, semblent souvent rendre mieux compte de la réalité des marchés.

Enfin, pour permettre aux étudiants d'appliquer la théorie de façon plus concrète, nous avons inclu un chapitre sur la simulation des modèles financiers et l'usage qu'on peut faire de l'informatique dans les questions d'évaluation et de couverture des options. On trouvera également, dans chaque chapitre un certain nombre d'exercices ou de problèmes.

Ce livre n'est qu'une introduction à un domaine qui a déjà suscité une abondante littérature. Les indications bibliographiques données à la fin de certains chapitres suggèrent au lecteur des pistes de lectures complémentaires sur les sujets traités. Mais certains aspects importants des mathématiques de la finance ne sont pas abordés, notamment les questions d'optimisation et les problèmes d'équilibre, pour lesquels on pourra se reporter à [Duf88].

Nous avons placé quelques rappels mathématiques en appendice. La lecture de ce livre suppose de toute façon de bonnes connaissances en probabilités (correspondant essentiellement aux sept premiers chapitres de [Bou86]).

## 5 Remerciements

Ce livre est issu d'un cours enseigné à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées depuis 1988. La mise en œuvre de ce cours n'aurait pas été possible sans les encouragements de N. Bouleau. Sous son impulsion, le CERMA (centre de mathématiques appliquées de l'E.N.P.C.) s'était engagé dans l'étude des modèles financiers dès 1987, avec le soutien de la Banque Indosuez, et, plus récemment, de la Banque Internationale de Placement. Nous avons bénéficié, depuis, de discussions nombreuses et stimulantes avec G. Pagès, ainsi qu'avec d'autres chercheurs du CERMA, en particulier O. Chateau et G. Caplain.

Plusieurs personnes ont bien voulu lire les premières versions de notre travail et nous faire part de leurs remarques : S. Cohen, O. Faure, C. Philoche, M. Picqué, X. Zhang. Enfin, nous remercions les collègues de l'université ou de l'I.N.R.I.A. qui nous ont aidés de leurs conseils ou de leurs encouragements : N. El Karoui, T. Jeulin, J.F. Le Gall, D. Talay.

# Chapitre 1

## Modèles discrets

Le but de ce chapitre est de présenter les principales idées de la théorie des options dans le cadre mathématiquement très simple des modèles discrets. Nous y reprenons essentiellement la première partie de [HP81]. Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est présenté en fin de chapitre sous forme de problème corrigé, pour illustrer la théorie de façon plus concrète.

## 1 Le formalisme des modèles discrets

### 1.1 Les actifs financiers

Un modèle de marché financier discret est construit sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F} : \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$ ;  $\mathcal{F}_n$  représente les informations disponibles à l'instant  $n$  et est appelée, "tribu des événements antérieurs à l'instant  $n$ ". "L'horizon"  $N$  sera le plus souvent, dans la pratique, la date d'échéance des options.

On supposera dans la suite que  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\forall \omega \in \Omega \mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ . On suppose qu'il y a sur le marché  $d + 1$  actifs financiers, dont les prix à l'instant  $n$  sont donnés par des variables aléatoires  $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$  à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu  $\mathcal{F}_n$  (les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs). Le vecteur  $S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d)$  est le vecteur des prix à l'instant  $n$ . L'actif numéroté 0 représente "les placements sans risque" et on posera  $S_0^0 = 1$ . Si le taux d'intérêt des placements sans risque sur une période est constant et égal à  $r$  on aura  $S_n^0 = (1 + r)^n$ . Le coefficient  $\beta_n = 1/S_n^0$  apparaît comme le coefficient d'actualisation (de la date  $n$  à la date 0) : c'est la somme d'argent qui, investie à l'instant 0 dans l'actif sans risque, permet de disposer de 1 franc à l'instant  $n$  (si on compte les prix en francs). Les actifs numérotés de 1 à  $d$  seront appelés actifs "à risques".

### 1.2 Les stratégies

Une *stratégie de gestion* est définie par un processus (simplement une suite dans le cas discret) aléatoire  $\phi = \left( (\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d) \right)_{0 \leq n \leq N}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^{d+1}$ , donnant à chaque instant  $n$  les quantités  $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$  des divers actifs, détenues en portefeuille. On impose au processus  $\phi$  d'être *prévisible* au sens suivant :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, d\} \left\{ \begin{array}{l} \phi_0^i \text{ est } \mathcal{F}_0\text{-mesurable} \\ \text{et, pour } n \geq 1 : \\ \phi_n^i \text{ est } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable.} \end{array} \right.$$

La signification de cette hypothèse est la suivante : le portefeuille à la date  $n$  :

$$(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d),$$

est constitué au vu des informations disponibles à la date  $(n-1)$  et conservé tel quel au moment des cotations à la date  $n$ .

La valeur du portefeuille à l'instant  $n$  est donnée par le produit scalaire :

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n = \sum_{i=0}^d \phi_n^i S_n^i,$$

la valeur actualisée est :

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n (\phi_n \cdot S_n) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n,$$

où  $\beta_n = 1/S_n^0$  et  $\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, \dots, \beta_n S_n^d)$  est le vecteur des prix actualisés.

On dira qu'une stratégie est *autofinancée* si la relation suivante est réalisée pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  :

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n.$$

Cette relation s'interprète de la façon suivante : à l'instant  $n$ , après avoir pris connaissance des cours  $S_n^0, \dots, S_n^d$ , l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition  $\phi_n$  à la composition  $\phi_{n+1}$ , le réajustement se faisant aux cours de la date  $n$  en réinvestissant la valeur totale du portefeuille et rien de plus. Il n'y a donc ni apports, ni retraits de fonds (en particulier, il n'y a pas de consommation).

**Remarque 1.1** L'égalité  $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$  est évidemment équivalente à

$$\phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n,$$

ou encore à

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n).$$

À l'instant  $n+1$ , la valeur du portefeuille est  $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1}$  et la différence  $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_{n+1} \cdot S_n$  représente le gain (net) dû à la variation des cours entre les instants  $n$  et  $n+1$ . Une stratégie autofinancée est donc une stratégie pour laquelle les variations de valeur du portefeuille viennent uniquement des gains dûs à l'agitation des cours.

La proposition suivante permet de préciser cette remarque en termes de quantités actualisées.

**Proposition 1.2** Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La stratégie  $\phi$  est autofinancée.

ii) Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta S_j,$$

où  $\Delta S_j$  est le vecteur  $S_j - S_{j-1}$ .

iii) Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j,$$

où  $\Delta \tilde{S}_j$  est le vecteur  $\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$ .

**Démonstration :** L'équivalence entre i) et ii) résulte de la remarque 1.1. L'équivalence entre i) et iii) s'obtient en remarquant que  $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$  si et seulement si  $\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$ . ■

Cette proposition montre que, pour une stratégie autofinancée, la valeur actualisée (et, donc, la valeur tout court) du portefeuille est complètement déterminée par la richesse initiale et le processus  $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$  des quantités d'actifs à risques détenues (cela vient simplement du fait que  $\Delta \tilde{S}_j^0 = 0$ ). Plus précisément, on peut énoncer la proposition suivante :

**Proposition 1.3** *Pour tout processus prévisible  $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  et pour toute variable  $V_0$   $\mathcal{F}_0$ -mesurable, il existe un et un seul processus prévisible  $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$  tel que la stratégie  $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$  soit autofinancée et de valeur initiale  $V_0$ .*

**Démonstration :** La condition d'autofinancement entraîne :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(\phi) &= \phi_n^0 + \phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + \dots + \phi_n^d \tilde{S}_n^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^n (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) \end{aligned}$$

Ce qui détermine  $\phi_n^0$ . La seule chose à vérifier est la prévisibilité de  $\phi^0$ , qui est immédiate à partir de l'égalité :

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) + (\phi_n^1 (-\tilde{S}_{n-1}^1) + \dots + \phi_n^d (-\tilde{S}_{n-1}^d))$$

■

### 1.3 Stratégies admissibles et arbitrage

Nous n'avons pas imposé de condition sur les signes des quantités  $\phi_n^i$ . Dire que  $\phi_n^0 < 0$ , signifie que l'on a emprunté la quantité  $|\phi_n^0|$  sur le marché des placements sans risques. Dire que  $\phi_n^i < 0$  pour un  $i \geq 1$ , c'est dire qu'on a des dettes libellées en actifs à risques (par suite de ventes à découvert). Les emprunts et les ventes à découvert sont donc permis, mais nous imposerons à la valeur du portefeuille d'être positive ou nulle à tout instant.

**Définition 1.4** *Une stratégie  $\phi$  est dite admissible si elle est autofinancée et si  $V_n(\phi) \geq 0$  pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ .*

L'investisseur doit donc être en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant.

La notion d'arbitrage (réalisation d'un profit sans prendre de risques) est alors formalisée de la façon suivante :

**Définition 1.5** *Une stratégie d'arbitrage est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.*

La plupart des modèles excluent toute possibilité d'arbitrage et l'objet de la section suivante est de donner une caractérisation de ces modèles grâce à la notion de martingale.

## 2 Martingales et arbitrages

Afin d'examiner les liens entre martingales et arbitrage, nous allons tout d'abord introduire la notion de martingale sur un espace de probabilité fini. Pour cela, l'usage de l'espérance conditionnelle est indispensable et nous renvoyons le lecteur à l'appendice pour un exposé des principales propriétés de cet outil.

### 2.1 Martingales et transformées de martingales

Dans ce paragraphe, on considère un espace de probabilité fini  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , avec  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\forall \omega \in \Omega, \mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ , muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$  (sans supposer  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ , ni  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ). On dira qu'une suite  $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$  de variables aléatoires est adaptée à la filtration si pour tout  $n$ ,  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable.

**Définition 2.1** Une suite adaptée  $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$  de variables aléatoires réelles est :

- une martingale si  $\mathbf{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$  pour tout  $n \leq N - 1$ .
- une surmartingale si  $\mathbf{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq M_n$  pour tout  $n \leq N - 1$ .
- une sousmartingale si  $\mathbf{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq M_n$  pour tout  $n \leq N - 1$ .

Ces définitions s'étendent aux variables aléatoires vectorielles : on dit par exemple qu'une suite  $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$  de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$  est une martingale si chaque composante du vecteur  $M_n$  définit une martingale réelle.

Dans un modèle financier, dire que le cours  $(S_n^i)_{0 \leq n \leq N}$  de l'actif  $i$  est une martingale revient à dire que, à tout instant  $n$ , la meilleure estimation (au sens des moindres carrés) que l'on puisse faire de  $S_{n+1}^i$ , à partir des informations disponibles à la date  $n$ , est donnée par  $S_n^i$ .

Les propriétés suivantes, qui se déduisent aisément de la définition qui précède, constitueront pour le lecteur de bons exercices de maniement de l'espérance conditionnelle.

1.  $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$  est une martingale si et seulement si :

$$\mathbf{E}(M_{n+j} | \mathcal{F}_n) = M_n \quad \forall j \geq 0$$

2. Si  $(M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale, on a pour tout  $n$  :  $\mathbf{E}(M_n) = \mathbf{E}(M_0)$ .
3. La somme de deux martingales est une martingale.
4. On a évidemment des propriétés analogues pour les surmartingales et les sousmartingales.

**Définition 2.2** Une suite adaptée  $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$  de variables aléatoires est prévisible si, pour tout  $n \geq 1$ ,  $H_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$  mesurable.

**Proposition 2.3** Soit  $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$  une martingale et soit  $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$  une suite prévisible par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ . On pose  $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$ . La suite  $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$  définie par :

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0 \\ X_n &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \dots + H_n \Delta M_n \quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

est une martingale par rapport à  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ .

$(X_n)$  est parfois appelée "transformée de la martingale  $(M_n)$  par la suite  $(H_n)$ ". Une conséquence de cette proposition et de la proposition 1.2 est que, dans les modèles financiers où les prix actualisés des actifs sont des martingales, toute stratégie autofinancée conduit à une valeur



finale actualisée égale, *en moyenne*, à la richesse initiale.

**Démonstration :** Il est clair que  $(X_n)$  est une suite adaptée. De plus, pour  $n \geq 0$ , on a :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbf{E}(H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n) \\ &= H_{n+1} \mathbf{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) \text{ car } H_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X_n | \mathcal{F}_n) = X_n$$

ce qui prouve que  $(X_n)$  est une martingale. ■

La proposition suivante donne une caractérisation des martingales qui nous sera utile par la suite.

**Proposition 2.4** *Une suite adaptée de variables aléatoires réelles  $(M_n)$  est une martingale si et seulement si pour toute suite prévisible  $(H_n)$ , on a :*

$$\mathbf{E} \left( \sum_{n=1}^N H_n \Delta M_n \right) = 0$$

**Démonstration :** Si  $(M_n)$  est une martingale, il en est de même, par la proposition 2.3, de la suite  $(X_n)$  définie par  $X_0 = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $X_n = \sum_{n=1}^N H_n \Delta M_n$ , pour toute suite prévisible  $(H_n)$ . On a donc  $\mathbf{E}(X_N) = \mathbf{E}(X_0) = 0$ . Réciproquement, on remarque que si  $j \in \{1, \dots, N\}$ , à tout événement  $\mathcal{F}_j$ -mesurable  $A$ , on peut associer la suite  $(H_n)$  définie par  $H_n = 0$  pour  $n \neq j+1$  et  $H_{j+1} = \mathbf{1}_A$ . Il est clair que la suite  $(H_n)$  est prévisible et l'égalité  $\mathbf{E} \left( \sum_{n=1}^N H_n \Delta M_n \right) = 0$  donne :

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_A (M_{j+1} - M_j)) = 0$$

et par conséquent  $\mathbf{E}(M_{j+1} | \mathcal{F}_j) = M_j$ . ■

## 2.2 Marchés financiers viables

Nous revenons maintenant aux modèles de marchés discrets introduits au paragraphe 1.

**Définition 2.5** *On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.*

**Théorème 2.6** *Le marché est viable si, et seulement si, il existe une probabilité  $\mathbf{P}^*$  équivalente<sup>1</sup> à  $\mathbf{P}$  sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

**Démonstration :**

a) Supposons qu'il existe une probabilité  $\mathbf{P}^*$  équivalente à  $\mathbf{P}$  sous laquelle les actifs actualisés sont des martingales. Alors, pour toute stratégie autofinancée  $(\phi_n)$ , on a, d'après la proposition 1.2 :

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j.$$

<sup>1</sup>Rappelons que deux probabilités  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  sont équivalentes si et seulement si, pour tout événement  $A$ ,  $\mathbf{P}_1(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}_2(A) = 0$ . Ici,  $\mathbf{P}^*$  équivalente à  $\mathbf{P}$  signifie simplement que, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $\mathbf{P}^*({\omega}) > 0$ .

On en déduit, grâce à la proposition 2.3, que  $(\tilde{V}_n(\phi))$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ . Donc  $\tilde{V}_N(\phi)$  a même espérance sous  $\mathbf{P}^*$  que  $V_0(\phi)$  :

$$\mathbf{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbf{E}^*(\tilde{V}_0(\phi)).$$

Si la stratégie est admissible et de valeur initiale nulle, on a donc  $\mathbf{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = 0$ , avec  $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$ . D'où,  $\tilde{V}_N(\phi) = 0$  puisque  $\mathbf{P}^*(\{\omega\}) > 0$ , pour tout  $\omega \in \Omega$ .

b) La démonstration de la réciproque est plus délicate. Soit  $\Gamma$  le cône convexe des variables aléatoires positives et non nulles. Le marché est viable si et seulement si pour toute stratégie admissible  $\phi$  on a :  $V_0(\phi) = 0 \Rightarrow \tilde{V}_N(\phi) \notin \Gamma$ .

b1) A tout processus prévisible  $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)$ , on associe le processus défini par :

$$\tilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^n (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d).$$

C'est le processus des gains actualisés cumulés dans toute stratégie autofinancée suivant les quantités d'actifs risqués  $\phi_n^1, \dots, \phi_n^d$ . D'après la proposition 1.3, il existe un (unique) processus  $(\phi_n^0)$  tel que la stratégie  $((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))$  soit autofinancée et de valeur initiale nulle.  $\tilde{G}_n(\phi)$  est alors la valeur actualisée à l'instant  $n$  de cette stratégie et l'hypothèse de viabilité du marché entraîne que si cette valeur est positive à tout instant, c'est-à-dire si  $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ , pour tout  $n = 1, \dots, N$ , alors  $\tilde{G}_N(\phi) = 0$ . Le lemme suivant montre que, même sans l'hypothèse de positivité des  $\tilde{G}_n(\phi)$ , on a encore  $\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma$ .

**Lemme 2.7** *Si le marché est viable, tout processus prévisible  $(\phi^1, \dots, \phi^d)$  vérifie :*

$$\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma.$$

**Démonstration :** Supposons  $\tilde{G}_N(\phi) \in \Gamma$ . On a clairement une contradiction de la viabilité si  $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$  pour tout  $n \in \{0, \dots, N\}$ . Si cette dernière propriété n'a pas lieu, introduisons l'entier  $n = \sup \{k | \mathbf{P}(\tilde{G}_k(\phi) < 0) > 0\}$ . On a :

$$n \leq N - 1, \quad \mathbf{P}(\tilde{G}_n(\phi) < 0) > 0 \text{ et } \forall m > n \quad \tilde{G}_m(\phi) \geq 0.$$

On définit alors un nouveau processus  $\psi$  en posant :

$$\psi_j(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n \\ \mathbf{1}_A(\omega) \phi_j(\omega) & \text{si } j > n \end{cases}$$

où  $A$  est l'événement  $\{\tilde{G}_n(\phi) < 0\}$ . En utilisant la prévisibilité de  $\phi$  et le fait que  $A$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable on voit que  $\psi$  est aussi prévisible. D'autre part :

$$\tilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq n \\ \mathbf{1}_A(\tilde{G}_j(\phi) - \tilde{G}_n(\phi)) & \text{si } j > n \end{cases}$$

Alors, on voit que  $\tilde{G}_j(\psi) \geq 0$  pour tout  $j \in \{0, \dots, N\}$  et que  $\tilde{G}_N(\psi) > 0$  sur  $A$  ce qui contredit la viabilité et achève la démonstration du lemme. ■

b2) Il est clair que l'ensemble  $\mathcal{V}$  des variables aléatoires de la forme  $\tilde{G}_N(\phi)$ , avec  $\phi$  prévisible à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$ , est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathbf{R}^\Omega$  de toutes les variables aléatoires réelles définies sur  $\Omega$ . D'après le lemme 2.7, le sous-espace  $\mathcal{V}$  ne rencontre pas  $\Gamma$ , ni le convexe compact  $K = \{X \in \Gamma | \sum_{\omega} X(\omega) = 1\}$ , qui est contenu dans  $\Gamma$ . Il en résulte, par le théorème de séparation des convexes (voir l'appendice), qu'il existe  $(\lambda(\omega))_{\omega \in \Omega}$  tel que :

$$1. \forall X \in \mathcal{K}, \quad \sum_{\omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$$

2. Pour tout  $\phi$  prévisible :

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0$$

De la propriété 1, on déduit que  $\lambda(\omega) > 0$  pour tout  $\omega \in \Omega$ , de sorte que la probabilité  $\mathbf{P}^*$  définie par :

$$\mathbf{P}^*({\omega}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}$$

est équivalente à  $\mathbf{P}$ .

De plus, si on note  $\mathbf{E}^*$  l'espérance par rapport à la probabilité  $\mathbf{P}^*$ , la propriété 2 signifie que, pour tout processus prévisible  $(\phi_n)$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$  :

$$\mathbf{E}^* \left( \sum_{j=1}^N \phi_j \Delta \tilde{S}_j \right) = 0.$$

On en déduit immédiatement que pour tout indice  $i \in \{1, \dots, d\}$  et toute suite prévisible  $(\phi_n^i)$ , à valeurs réelles, on a :

$$\mathbf{E}^* \left( \sum_{j=1}^N \phi_j^i \Delta \tilde{S}_j^i \right) = 0,$$

ce qui entraîne, grâce à la proposition 2.4 que, sous  $\mathbf{P}^*$ , les prix actualisés  $(\tilde{S}_n^1), \dots, (\tilde{S}_n^d)$  sont des martingales. ■

## 3 Marchés complets et évaluation des options

### 3.1 Marchés complets

Nous définirons une *option<sup>2</sup> européenne* d'échéance  $N$  par la donnée d'une variable aléatoire  $h \geq 0$ ,  $\mathcal{F}_N$ -mesurable, représentant le profit que permet l'exercice de l'option. Ainsi, pour une option d'achat ou "call" sur une unité d'actif 1, au prix d'exercice  $K$ , on a :  $h = (S_N^1 - K)_+$  et, pour une option de vente ou "put" sur une unité d'actif 1 au prix d'exercice  $K$  :  $h = (K - S_N^1)_+$ . Dans ces deux exemples (les plus importants dans la pratique), la variable aléatoire  $h$  est une fonction de  $S_N$  seulement. Il existe des options pour lesquelles  $h$  dépend de toutes les valeurs des cours jusqu'à l'échéance :  $S_0, S_1, \dots, S_N$ . C'est le cas des options dites *asiatiques*, dont le prix d'exercice est égal à la moyenne des cours observés sur une période donnée, précédant l'échéance.

**Définition 3.1** *On dit que l'actif conditionnel défini par  $h$  est simulable (ou atteignable<sup>3</sup>) s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant  $N$  est égale à  $h$ .*

<sup>2</sup>ou plus généralement un "bien contingent" (contingent claim) ou "actif conditionnel".

<sup>3</sup>"attainable" dans certains articles américains.

**Remarque 3.2** Dans un marché viable, pour que l'option  $h$  soit simulable, il suffit qu'il existe une stratégie *autofinancée* de valeur égale à  $h$  à l'instant  $N$ . En effet, si  $\phi$  est une stratégie autofinancée et si  $\mathbf{P}^*$  est une probabilité équivalente à  $\mathbf{P}$  sous laquelle les prix actualisés sont des martingales, alors, sous  $\mathbf{P}^*$ ,  $(\tilde{V}_n(\phi))$  est une martingale (en tant que transformée de martingale). On a donc, pour  $n \in \{0, \dots, N\}$   $\tilde{V}_n(\phi) = \mathbf{E}^*(\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_n)$ . Il est clair alors que, si  $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$  (en particulier si  $V_N(\phi) = h$ ), la stratégie  $\phi$  est admissible.

**Définition 3.3** On dit que le marché est complet si tout actif conditionnel est simulable.

Supposer qu'un marché financier est complet est une hypothèse restrictive dont la justification économique est moins claire que celle de l'hypothèse de viabilité. L'intérêt des marchés complets est qu'ils se prêtent à une théorie très simple de l'évaluation et de la couverture des actifs conditionnels. Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein, que nous étudierons plus loin, fournit un exemple de modèle de marché complet d'une grande simplicité. Le théorème suivant donne une caractérisation des marchés viables et complets.

**Théorème 3.4** Un marché viable est complet si, et seulement si, il existe une seule probabilité  $\mathbf{P}^*$  équivalente à  $\mathbf{P}$  sous laquelle les prix actualisés des actifs soient des martingales.

La probabilité  $\mathbf{P}^*$  apparaîtra dans la suite comme l'outil de *calcul* des formules de prix et de couverture.

**Démonstration :**

a) Supposons le marché viable et complet. Alors, toute variable aléatoire  $h$   $\mathcal{F}_N$ -mesurable et positive peut s'écrire  $h = V_N(\phi)$  où  $\phi$  est une stratégie admissible, qui simule l'actif conditionnel  $h$ . Puisque  $\phi$  est une stratégie autofinancée on a :

$$\frac{h}{S_N^0} = \tilde{V}_N(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j.$$

Alors, si  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  sont deux probabilités sous lesquelles les prix actualisés sont des martingales,  $(\tilde{V}_n(\phi))_{0 \leq n \leq N}$  est une martingale à la fois sous  $\mathbf{P}_1$  et sous  $\mathbf{P}_2$ . D'où pour  $i = 1$  ou  $2$  :

$$\mathbf{E}_i(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbf{E}_i(V_0(\phi)) = V_0(\phi),$$

la dernière égalité venant du fait que  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . On a donc :

$$\mathbf{E}_1\left(\frac{h}{S_N^0}\right) = \mathbf{E}_2\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$$

et, comme  $h$  est arbitraire,  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$  sur la tribu  $\mathcal{F}_N$ , que l'on a supposée égale à  $\mathcal{F}$ .

b) Supposons le marché viable et non complet. Alors il existe une variable aléatoire  $h \geq 0$  non simulable. Notons  $\tilde{\mathcal{V}}$  l'espace des variables aléatoires de la forme :

$$U_0 + \sum_{n=1}^N \phi_n \cdot \Delta \tilde{S}_n, \quad (1.1)$$

avec  $U_0$   $\mathcal{F}_0$ -mesurable et  $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  prévisible, à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$ . Il résulte de la proposition 1.3 et de la remarque 3.2 que la variable aléatoire  $h/S_N^0$  n'appartient pas à  $\tilde{\mathcal{V}}$ .  $\tilde{\mathcal{V}}$  est donc un sous-espace strict de l'espace de toutes les variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Alors, si  $\mathbf{P}^*$  est une probabilité équivalente à  $\mathbf{P}$  sous laquelle les prix actualisés sont des martingales et si l'on munit l'espace des variables aléatoires du produit scalaire  $(X, Y) \mapsto \mathbf{E}^*(XY)$ , on voit qu'il existe une variable aléatoire  $X$  non nulle et orthogonale au sous-espace  $\tilde{\mathcal{V}}$ .

Posons alors :

$$\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \mathbf{P}^*(\{\omega\})$$

où  $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$ . On définit ainsi une probabilité (car  $\mathbf{E}^*(X) = 0$ ) qui est équivalente à  $\mathbf{P}$ , et distincte de  $\mathbf{P}^*$ . On a de plus

$$\mathbf{E}^{**}\left(\sum_{n=1}^N \phi_n \cdot \Delta \tilde{S}_n\right) = 0$$

pour tout processus prévisible  $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ , ce qui entraîne, par la proposition 2.4, que  $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$  est une  $\mathbf{P}^{**}$ -martingale. ■

### 3.2 Evaluation et couverture des actifs conditionnels dans les marchés complets

On suppose le marché viable et complet et on note  $\mathbf{P}^*$  l'unique probabilité sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Soit un actif conditionnel défini par une variable aléatoire  $\mathcal{F}_N$ -mesurable  $h \geq 0$  et soit  $\phi$  une stratégie admissible simulant  $h$ , c'est-à-dire vérifiant :

$$V_N(\phi) = h.$$

La suite  $(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$  et par conséquent,  $V_0(\phi) = \mathbf{E}^*(\tilde{V}_N(\phi))$ , d'où  $V_0(\phi) = \mathbf{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$  et plus généralement

$$V_n(\phi) = S_n^0 \mathbf{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\right), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

La valeur à tout instant de toute stratégie admissible simulant  $h$  est donc complètement déterminée par  $h$ . Il est naturel d'appeler  $V_n(\phi)$  la valeur de l'option : c'est la richesse qui, détenue à l'instant  $n$ , permet, en suivant la stratégie  $\phi$  à partir de l'instant  $n$ , de produire exactement la richesse  $h$  à l'instant  $N$ .

Si, à l'instant 0, un investisseur vend l'option au prix

$$\mathbf{E}^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right),$$

il a la possibilité, en suivant une stratégie simulante  $\phi$ , de restituer la richesse promise  $h$  à l'instant  $N$  ; c'est à dire qu'il peut *se couvrir parfaitement*.

**Remarque 3.5** Il est important de noter que le calcul du prix nécessite seulement la connaissance de  $\mathbf{P}^*$  (pas celle de  $\mathbf{P}$ ). On aurait pu se contenter de partir de l'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{F})$ , muni de la filtration  $(\mathcal{F}_n)$ , c'est-à-dire, concrètement, de définir tous les états possibles et l'évolution de l'information disponible au cours du temps. Dès que l'espace  $(\Omega, \mathcal{F})$  et la filtration sont spécifiés, il est inutile, pour évaluer des options par simulation, de déterminer les "vraies" probabilités des divers états possibles (en utilisant notamment une approche statistique). L'étude du modèle de Cox-Ross-Rubinstein montrera comment, dans la pratique, les calculs de prix et de couverture peuvent être menés à bien.

### 3.3 Première approche des options américaines

Une option américaine pouvant être exercée à n'importe quel instant entre 0 et N, nous la définirons comme une suite  $(Z_n)$  positive et adaptée à la filtration  $(\mathcal{F}_n)$ ,  $Z_n$  représentant le profit que permet l'exercice de l'option à l'instant n. Dans le cas d'un call américain sur une unité d'actif 1 au prix d'exercice K,  $Z_n = (S_n^1 - K)_+$ ; dans le cas d'un put américain,  $Z_n = (K - S_n^1)_+$ . Pour définir la valeur de l'option américaine associée au processus  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ , nous allons raisonner par récurrence en marche arrière à partir de l'échéance N. Il est clair que la valeur de l'option à l'instant N est  $U_N = Z_N$ . A quel prix vendre l'option à l'instant  $N - 1$ ? Si l'acheteur exerce immédiatement, il fera le profit  $Z_{N-1}$ , sinon il exercera (éventuellement) à l'instant N et le vendeur doit être prêt à payer la richesse  $Z_N$  à l'instant N. Le vendeur doit donc encaisser à l'instant  $N - 1$  une somme au moins égale à  $Z_{N-1}$  et lui permettant de fournir la richesse  $Z_N$  à l'instant N. La somme qui, disponible à l'instant  $N - 1$ , permet d'obtenir la richesse  $Z_N$  à l'instant N, c'est la valeur à l'instant  $N - 1$  d'une stratégie admissible de valeur finale  $Z_N$ , c'est-à-dire  $S_{N-1}^0 \mathbf{E}^* (\tilde{Z}_N | \mathcal{F}_{N-1})$ , avec  $\tilde{Z}_N = Z_N / S_N^0$ . Il est donc naturel de prendre pour valeur de l'option américaine à l'instant  $N - 1$  la quantité :

$$U_{N-1} = \max \left( Z_{N-1}, S_{N-1}^0 \mathbf{E}^* (\tilde{Z}_N | \mathcal{F}_{N-1}) \right).$$

De proche en proche, on définit la valeur de l'option américaine à l'instant n par la relation de récurrence suivante, valable pour  $n = 1, \dots, N$  :

$$U_{n-1} = \max \left( Z_{n-1}, S_{n-1}^0 \mathbf{E}^* \left( \frac{U_n}{S_n^0} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) \right).$$

Dans le cas d'un taux d'intérêt constant égal à r sur chaque période,

$$S_n^0 = (1 + r)^n$$

et :

$$U_{n-1} = \max \left( Z_{n-1}, \frac{1}{1 + r} \mathbf{E}^* (U_n | \mathcal{F}_{n-1}) \right).$$

Soit  $\tilde{U}_n = \frac{U_n}{S_n^0}$  la valeur actualisée de l'option américaine.

**Proposition 3.6** *La suite  $(\tilde{U}_n)_{0 \leq n \leq N}$  est une  $\mathbf{P}^*$ -surmartingale. C'est la plus petite  $\mathbf{P}^*$ -surmartingale majorant la suite  $(\tilde{Z}_n)_{0 \leq n \leq N}$ .*

Noter que, contrairement au cas européen, la valeur actualisée de l'option américaine ne définit pas nécessairement une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ .

**Démonstration :** De la relation :

$$\tilde{U}_{n-1} = \max \left( \tilde{Z}_{n-1}, \mathbf{E}^* (\tilde{U}_n | \mathcal{F}_{n-1}) \right),$$

on déduit que  $(\tilde{U}_n)_{0 \leq n \leq N}$  est une surmartingale majorant  $(\tilde{Z}_n)_{0 \leq n \leq N}$ . Soit maintenant une surmartingale  $(\tilde{T}_n)_{0 \leq n \leq N}$  majorant  $(\tilde{Z}_n)_{0 \leq n \leq N}$ . Alors  $\tilde{T}_N \geq \tilde{U}_N$  et si  $\tilde{T}_n \geq \tilde{U}_n$  on a :

$$\tilde{T}_{n-1} \geq \mathbf{E}^* (\tilde{T}_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq \mathbf{E}^* (\tilde{U}_n | \mathcal{F}_{n-1})$$

et donc :

$$\tilde{T}_{n-1} \geq \max \left( \tilde{Z}_{n-1}, \mathbf{E}^* (\tilde{U}_n | \mathcal{F}_{n-1}) \right) = \tilde{U}_{n-1}.$$

Ce qui démontre que  $(\tilde{T}_n)$  majore  $(\tilde{U}_n)$ , par récurrence descendante sur n. ■

## 4 Problème corrigé : le modèle de Cox, Ross et Rubinstein

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein est une version discrétisée du modèle de Black-Scholes (qui sera étudié au chapitre 4), dans laquelle il y a un seul actif à risque, de prix  $S_n$  à l'instant  $n$ ,  $0 \leq n \leq N$ , et un actif sans risque de rendement certain  $r$  sur une période, de sorte que, avec les notations des paragraphes précédents :  $S_n^0 = (1+r)^n$

On fait les hypothèses suivantes sur l'évolution du cours de l'actif risqué : entre deux périodes consécutives, la variation relative des cours est soit  $a$ , soit  $b$ , avec  $-1 < a < b$  :

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \\ S_n(1+b) \end{cases}$$

Le cours initial  $S_0$  est donné. L'espace naturel des résultats possibles est donc  $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ , chaque  $N$ -uple représentant les valeurs successives de  $S_{n+1}/S_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . On prend naturellement :  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , et  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . La tribu  $\mathcal{F}_n$  sera, pour  $n = 1, \dots, N$ , la tribu  $\sigma(S_1, \dots, S_n)$  engendrée par les variables aléatoires  $S_1, \dots, S_n$ . L'hypothèse définissant  $\mathbf{P}$  à une équivalence près est que tous les singletons de  $\Omega$  ont une probabilité non nulle.

Introduisons les variables aléatoires  $T_n = S_n/S_{n-1}$ , pour  $n = 1, \dots, N$ . Si  $(x_1, \dots, x_N)$  est un élément de  $\Omega$ , on a  $\mathbf{P}\{(x_1, \dots, x_N)\} = \mathbf{P}\{T_1 = x_1, \dots, T_N = x_N\}$ . La connaissance de  $\mathbf{P}$  équivaut donc à celle de la loi du  $N$ -uple  $(T_1, T_2, \dots, T_N)$ . Notons aussi que, pour  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$ .

1. Montrer que le prix actualisé  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$  si et seulement si  $\mathbf{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1+r$ ,  $\forall n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ .

La relation  $\mathbf{E}(\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n$  est équivalente à  $\mathbf{E}(\tilde{S}_{n+1}/\tilde{S}_n|\mathcal{F}_n) = 1$ , puisque  $\tilde{S}_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et cette dernière égalité équivaut à  $\mathbf{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1+r$ .

2. En déduire que, pour que le marché soit viable, il est nécessaire que  $r$  appartienne à l'intervalle  $]a, b[$ .

Si le marché est viable, il existe une probabilité  $\mathbf{P}^*$  équivalente à  $\mathbf{P}$ , sous laquelle  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale. On a donc, d'après la question 1 :

$$\mathbf{E}^*(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1+r$$

et par conséquent  $\mathbf{E}^*(T_{n+1}) = 1+r$ . Comme  $T_{n+1}$  est à valeurs dans  $\{1+a, 1+b\}$  et prend ces deux valeurs avec une probabilité non nulle, on a nécessairement :  $(1+r) \in ]1+a, 1+b[$ .

3. Donner des exemples d'arbitrages possibles si la condition nécessaire de viabilité obtenue en 2 n'est pas vérifiée.

Supposons par exemple  $r \leq a$ . En empruntant une somme  $S_0$  à l'instant 0, on peut acheter une unité d'actif risqué. A la date  $N$ , on rembourse l'emprunt et on revend l'actif risqué. Le profit réalisé  $S_N - S_0(1+r)^N$  est toujours positif ou nul, puisque  $S_N \geq S_0(1+a)^N$ , et strictement positif avec une probabilité non nulle. On a donc bien un arbitrage. Quand  $r \geq b$ , l'arbitrage s'obtient en vendant l'actif risqué à découvert.

4. Pour toute la suite, on suppose que  $r \in ]a, b[$  et on pose  $p = (b-r)/(b-a)$ . Montrer que  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$  si et seulement si les variables aléatoires  $T_1, T_2, \dots, T_N$  sont indépendantes équidistribuées, leur loi commune étant donnée par :  $\mathbf{P}(T_1 = 1+a) = p = 1 - \mathbf{P}(T_1 = 1+b)$ . En déduire que le marché est viable et complet.

Si les  $T_i$  sont indépendantes et vérifient  $\mathbf{P}(T_i = 1+a) = p = 1 - \mathbf{P}(T_i = 1+b)$ , on a :

$$\mathbf{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(T_{n+1}) = p(1+a) + (1-p)(1+b) = 1+r$$

et  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$ , d'après la question 1.

Réciproquement, si, pour  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $\mathbf{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r$ , on peut écrire :

$$(1 + a)\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n\right) + (1 + b)\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n\right) = 1 + r$$

On en déduit, en utilisant l'égalité

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n\right) + \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n\right) = 1$$

que  $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+a\}}|\mathcal{F}_n\right) = p$  et  $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{\{T_{n+1}=1+b\}}|\mathcal{F}_n\right) = 1 - p$ . On voit alors, en raisonnant par récurrence sur  $n$  que, pour tous  $x_i \in \{1 + a, 1 + b\}$ ,

$$\mathbf{P}(T_1 = x_1, \dots, T_n = x_n) = \prod_{i=1}^n p_i$$

où  $p_i = p$  si  $x_i = 1 + a$  et  $p_i = 1 - p$  si  $x_i = 1 + b$ , ce qui prouve que les  $T_i$  sont indépendantes équidistribuées sous  $\mathbf{P}$  et vérifient  $\mathbf{P}(T_i = 1 + a) = p$ .

Ainsi, on voit que la condition que  $(\tilde{S}_n)$  soit une martingale sous  $\mathbf{P}$  détermine la loi du  $N$ -uplet  $(T_1, T_2, \dots, T_N)$  sous  $\mathbf{P}$ , et donc la probabilité  $\mathbf{P}$  elle-même, de façon unique. Le marché est donc viable et complet.

5. On note  $C_n$  (resp.  $P_n$ ) la valeur, à l'instant  $n$ , d'un call (resp. d'un put) européen sur une unité d'actif risqué au prix d'exercice  $K$  et d'échéance  $N$ .
- (a) Retrouver, à partir des formules de prix sous forme d'espérances conditionnelles, la relation de parité call-put :

$$C_n - P_n = S_n - K(1 + r)^{-(N-n)}.$$

Notant  $\mathbf{E}^*$  l'espérance par rapport à l'unique probabilité  $\mathbf{P}^*$  sous laquelle  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale, on a :

$$\begin{aligned} C_n - P_n &= (1 + r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^* \left( (S_N - K)_+ - (K - S_N)_+ | \mathcal{F}_n \right) \\ &= (1 + r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^* (S_N - K | \mathcal{F}_n) \\ &= S_n - K(1 + r)^{-(N-n)}, \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant du fait que  $(\tilde{S}_n)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ .

- (b) Montrer que  $C_n$  peut s'écrire sous la forme :  $C_n = c(n, S_n)$ , où  $c$  est une fonction que l'on explicitera à l'aide de  $K, a, b, r$  et  $p$ .

En écrivant  $S_N = S_n \prod_{i=n+1}^N T_i$ , on obtient :

$$C_n = (1 + r)^{-(N-n)} \mathbf{E}^* \left( \left( S_n \prod_{i=n+1}^N T_i - K \right)_+ \middle| \mathcal{F}_n \right)$$

Comme, sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ , la variable aléatoire  $\prod_{i=n+1}^N T_i$  est indépendante de  $\mathcal{F}_n$  et que  $S_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable, on peut écrire, en utilisant la proposition 2.5 de l'appendice :  $C_n = c(n, S_n)$ , où  $c$  est la fonction définie par :

$$\begin{aligned} & \frac{c(n, x)}{(1 + r)^{-(N-n)}} \\ &= \mathbf{E}^* \left( \left( x \prod_{i=n+1}^N T_i - K \right)_+ \right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-n} \frac{(N-n)!}{(N-n-j)!j!} p^j (1-p)^{N-n-j} \left( x(1+a)^j (1+b)^{N-n-j} - K \right)_+ \end{aligned}$$



6. Montrer que la stratégie de couverture parfaite d'un call est définie par une quantité d'actif risqué  $H_n = \Delta(n, S_{n-1})$  à détenir à l'instant  $n$ , où  $\Delta$  est une fonction que l'on exprimera à partir de la fonction  $c$ .

Notant  $H_n^0$  la quantité d'actif sans risque dans le portefeuille simulant le call, on a :

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_n = c(n, S_n)$$

Puisque  $H_n^0$  et  $H_n$  sont  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurables, ce sont des fonctions de  $S_1, \dots, S_{n-1}$  seulement et,  $S_n$  étant égal à  $S_{n-1}(1+a)$  ou  $S_{n-1}(1+b)$ , l'égalité ci-dessus implique :

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_{n-1}(1+a) = c(n, S_{n-1}(1+a))$$

et

$$H_n^0(1+r)^n + H_n S_{n-1}(1+b) = c(n, S_{n-1}(1+b))$$

D'où, par soustraction,

$$\Delta(n, x) = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}.$$

7. On utilise maintenant le modèle pour "pricer" un call ou un put d'échéance  $T$  sur une action. Pour cela, on fait tendre  $N$  vers l'infini en imposant les relations suivantes :  $r = RT/N$ ,  $\log((1+a)/(1+r)) = -\sigma/\sqrt{N}$  et  $\log((1+b)/(1+r)) = \sigma/\sqrt{N}$ . Le réel  $R$  s'interprète comme le taux d'intérêt instantané entre les instants 0 et  $T$ , puisque  $e^{RT} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1+r)^N$ , et  $\sigma^2$  comme la variance limite, sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ , de la variable aléatoire  $\log(S_N)$ , quand  $N$  tend vers l'infini,  $S_N$  représentant le cours de l'action à la date  $T$ .

- (a) Montrer que si  $(Y_N)_{N \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires de la forme :

$$Y_N = X_1^N + X_2^N + \dots + X_N^N$$

où, pour chaque  $N$ , les variables aléatoires  $X_i^N$  sont indépendantes équidistribuées, à valeurs dans :

$$\left\{ -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right\},$$

et de moyenne  $\mu_N$ , avec  $\lim_{N \rightarrow \infty} (N\mu_N) = \mu$ , alors la suite  $(Y_N)$  converge en loi vers une gaussienne de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ .

Il suffit d'étudier la convergence de la fonction caractéristique  $\phi_{Y_N}$  de  $Y_N$ . Le calcul donne :

$$\begin{aligned} \phi_{Y_N}(u) &= \mathbf{E} \left( e^{iuY_N} \right) = \prod_{j=1}^N \mathbf{E} \left( e^{iuX_j^N} \right) \\ &= \left( \mathbf{E} \left( e^{iuX_1^N} \right) \right)^N \\ &= \left( 1 + iu\mu_N - \frac{\sigma^2 u^2}{2N} + o(1/N) \right)^N. \end{aligned}$$

D'où :  $\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_{Y_N}(u) = \exp \left( iu\mu - \frac{\sigma^2 u^2}{2} \right)$ , ce qui prouve la convergence demandée.

- (b) Expliciter les valeurs limites du put, puis du call à l'instant 0.

Pour  $N$  fixé, le prix du put à l'instant 0 est donné par :

$$\begin{aligned} P_0^{(N)} &= (1+RT/N)^{-N} \mathbf{E}^* \left( K - S_0 \prod_{n=1}^N T_n \right)_+ \\ &= \mathbf{E}^* \left( (1+RT/N)^{-N} K - S_0 e^{Y_N} \right)_+ \end{aligned}$$

où  $Y_N = \sum_{n=1}^N \log(T_n/(1+r))$ . Avec les hypothèses de l'énoncé, les variables aléatoires  $X_j^N = \log(T_j/(1+r))$  sont à valeurs dans  $\{-\sigma/\sqrt{N}, \sigma/\sqrt{N}\}$ , et indépendantes équidistribuées sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ . On a de plus :

$$\mathbf{E}^*(X_j^N) = (1-2p) \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{2 - e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}{e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

La suite  $(Y_N)$  est donc du type étudié dans la question 7a, avec  $\mu = -\sigma^2/2$ . Si on pose  $\psi(y) = (Ke^{-RT} - S_0e^y)_+$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} |P_0^{(N)} - \mathbf{E}^*(\psi(Y_N))| &= \left| \mathbf{E}^* \left( \left( (1+RT/N)^{-N}K - S_0e^{Y_N} \right)_+ - \left( Ke^{-RT} - S_0e^{Y_N} \right)_+ \right) \right| \\ &\leq K \left| (1+RT/N)^{-N} - e^{-RT} \right| \end{aligned}$$

D'où, en utilisant la convergence en loi de  $(Y_N)$  et le fait que la fonction  $\psi$  est continue bornée (c'est précisément pour avoir une fonction bornée que nous avons étudié le put d'abord) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_0^{(N)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}^*(\psi(Y_N)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (Ke^{-RT} - S_0e^{-\sigma^2/2 + \sigma y})_+ e^{-y^2/2} dy.$$

L'intégrale obtenue s'exprime, après un calcul élémentaire, à l'aide de la fonction de répartition  $F$  de la loi normale centrée réduite, de sorte que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_0^{(N)} = Ke^{-RT}F(-d_2) - S_0F(-d_1),$$

où  $d_1 = (\log(x/K) + RT + \sigma^2/2)/\sigma$ ,  $d_2 = d_1 - \sigma$  et

$$F(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-x^2/2} dx.$$

Pour le call, on obtient, en utilisant la relation de parité put-call :  $\lim_{N \rightarrow \infty} C_0^{(N)} = S_0F(d_1) - Ke^{-RT}F(d_2)$ .

**Remarque 4.1** Dans les formules obtenues, le seul paramètre qui n'est pas directement observable sur le marché est  $\sigma$ . L'interprétation de  $\sigma$  comme variance suggère de l'estimer par des voies statistiques. Nous reviendrons sur cette question dans le chapitre 4.

**Indications bibliographiques** Nous avons supposé, dans ce chapitre, qu'il n'y avait pas de distribution de dividendes. En fait, on peut utiliser les mêmes idées pour traiter les marchés avec dividendes (cf. [HL88], chapitre 8). Le théorème de caractérisation des marchés complets peut être étendu à des espaces de probabilité infinis (cf. [DMW90], [Mor89]). A temps continu, la formulation du problème est délicate (cf. [HK79], [Str90] et [DS94]). La théorie des marchés complets à temps continu est développée dans [HP81] et [HP83]. On trouvera une présentation élémentaire du modèle de Cox-Ross-Rubinstein dans [CR85].

# Chapitre 2

## Problème d'arrêt optimal et options américaines

Le but de ce chapitre est de traiter l'évaluation et la couverture des options américaines et de faire apparaître le lien entre ces questions et le problème d'arrêt optimal. Pour cela, nous aurons besoin de la notion de temps d'arrêt, qui permet de modéliser les stratégies d'exercice d'une option américaine, et de la notion d'enveloppe de Snell, qui est la clé de la résolution du problème d'arrêt optimal. L'application de ces notions aux options américaines sera précisée dans le paragraphe 5 de ce chapitre.

### 1 Notion de temps d'arrêt

Le détenteur d'une option américaine peut l'exercer à tout moment, jusqu'à la date d'échéance. La décision d'exercer ou de ne pas exercer à l'instant  $n$  se fera au vu des informations disponibles à l'instant  $n$ . Si on se place dans un modèle discret construit sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, \mathbf{P})$  fini, on est conduit à décrire la date d'exercice par une variable aléatoire appelée temps d'arrêt :

**Définition 1.1** Une variable aléatoire  $\nu$ , à valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$  est un temps d'arrêt si, pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$  :

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

**Remarque 1.2** Comme dans le chapitre précédent, nous supposons que  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0, \forall \omega \in \Omega$ . Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas essentielle : si elle n'est pas vérifiée, les résultats exposés dans ce chapitre restent vrais à condition de prendre les égalités au sens presque sûr. Par contre, nous ne ferons pas les hypothèses  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  et  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ , sauf dans le contexte purement financier du paragraphe 5.

**Remarque 1.3** On pourra vérifier, à titre d'exercice, que  $\nu$  est un temps d'arrêt si et seulement si, pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$  :

$$\{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Cette définition équivalente du temps d'arrêt est celle qui se généralise au temps continu.

Introduisons maintenant la notion de "suite arrêtée à un temps d'arrêt". Soit  $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$  une suite adaptée à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$  et soit  $\nu$  un temps d'arrêt. La suite arrêtée à l'instant  $\nu$  est définie par :

$$X_n^\nu(\omega) = X_{\nu(\omega) \wedge n}(\omega)$$

c'est à dire que, sur l'ensemble  $\{\nu = j\}$  on a :

$$X_n^\nu = \begin{cases} X_j & \text{si } j \leq n \\ X_n & \text{si } j > n. \end{cases}$$

Noter que  $X_N^\nu(\omega) = X_{\nu(\omega)}(\omega) (= X_j \text{ sur } \{\nu = j\})$ .

**Proposition 1.4** Soit  $(X_n)$  une suite adaptée et soit  $\nu$  un temps d'arrêt. La suite arrêtée  $(X_n^\nu)_{0 \leq n \leq N}$  est adaptée. Si, de plus,  $(X_n)$  est une martingale (resp. une surmartingale), alors  $(X_n^\nu)$  est une martingale (resp. une surmartingale).

**Démonstration :** On remarque que, pour  $n \geq 1$ , on a :

$$X_{\nu \wedge n} = X_0 + \sum_{j=1}^n \phi_j (X_j - X_{j-1}),$$

où  $\phi_j = \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}}$ . Puisque  $\{j \leq \nu\}$  est le complémentaire de l'ensemble  $\{\nu < j\} = \{\nu \leq j-1\}$ , le processus  $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$  est prévisible.

Il est clair alors que  $(X_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N}$  est adaptée à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ . De plus, si  $(X_n)$  est une martingale,  $(X_{\nu \wedge n})$  est aussi une martingale par rapport à  $(\mathcal{F}_n)$ , en tant que transformée de la martingale  $(X_n)$ . On montre de même que si la suite  $(X_n)$  est une surmartingale (resp. une sousmartingale), la suite arrêtée est encore une surmartingale (resp. une sousmartingale) en utilisant la prévisibilité et la positivité de  $(\phi_j)_{0 \leq j \leq N}$ . ■

## 2 Enveloppe de Snell

Dans ce paragraphe, on se donne une suite  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$  adaptée, et on se propose d'étudier la suite  $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$  définie par les relations :

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max(Z_n, \mathbf{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \quad \forall n \leq N-1. \end{cases}$$

Cette étude est motivée par notre première approche des options américaines (paragraphe 3.3 du chapitre 1). Nous savons déjà, par la proposition 3.6 du chapitre 1, que  $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$  est la plus petite surmartingale majorant la suite  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ . On l'appelle enveloppe de Snell de la suite  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ .

La relation de récurrence définissant  $(U_n)$  montre qu'à chaque instant,  $U_n$  est au dessus de  $Z_n$  (avec égalité pour  $n = N$ ) et que, tant que l'inégalité est stricte,  $U_n = \mathbf{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ . Cela suggère qu'en arrêtant convenablement la suite  $(U_n)$ , on puisse obtenir une martingale, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 2.1** *La variable aléatoire définie par :*

$$\nu_0 = \inf\{n \geq 0 | U_n = Z_n\}$$

*est un temps d'arrêt et la suite arrêtée  $(U_{n \wedge \nu_0})_{0 \leq n \leq N}$  est une martingale.*

**Démonstration :** Puisque  $U_N = Z_N$ ,  $\nu_0$  définit bien un élément de  $\{0, 1, \dots, N\}$  et l'on a :

$$\{\nu_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0,$$

et pour  $k \geq 1$  :

$$\{\nu_0 = k\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \dots \cap \{U_{k-1} > Z_{k-1}\} \cap \{U_k = Z_k\} \in \mathcal{F}_k.$$

Pour montrer que  $(U_n^{\nu_0})$  est une martingale, on écrit, comme dans la démonstration de la proposition 1.4 :

$$U_n^{\nu_0} = U_{n \wedge \nu_0} = U_0 + \sum_{j=1}^n \phi_j \Delta U_j$$

où  $\phi_j = \mathbf{1}_{\{\nu_0 \geq j\}}$ . D'où, pour  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  :

$$\begin{aligned} U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} &= \phi_{n+1} (U_{n+1} - U_n) \\ &= \mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu_0\}} (U_{n+1} - U_n) \end{aligned}$$

On a, par définition,  $U_n = \max(Z_n, \mathbf{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n))$  et sur l'ensemble  $\{n+1 \leq \nu_0\}$ ,  $U_n > Z_n$  et par conséquent  $U_n = \mathbf{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ . D'où :

$$U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0} = \mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu_0\}} (U_{n+1} - \mathbf{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n))$$

et, en conditionnant :

$$\mathbf{E}\left((U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0}) | \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu_0\}} \mathbf{E}\left((U_{n+1} - \mathbf{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)) | \mathcal{F}_n\right)$$

car  $\{n+1 \leq \nu_0\} \in \mathcal{F}_n$  (puisque le complémentaire de  $\{n+1 \leq \nu_0\}$  est  $\{\nu_0 \leq n\}$ ).

D'où :

$$\mathbf{E}\left((U_{n+1}^{\nu_0} - U_n^{\nu_0}) | \mathcal{F}_n\right) = 0$$

ce qui prouve que  $U^{\nu_0}$  est une martingale. ■

Dans la suite, nous noterons  $\mathcal{T}_{n,N}$  l'ensemble des temps d'arrêt qui prennent leurs valeurs dans  $\{n, n+1, \dots, N\}$ . Remarquons que, puisque  $\Omega$  est supposé fini,  $\mathcal{T}_{n,N}$  est un ensemble fini. La propriété de martingale de la suite  $U^{\nu_0}$  permet de montrer le résultat suivant, qui fait le lien entre enveloppe de Snell et problème d'arrêt optimal.

**Corollaire 2.2** *Le temps d'arrêt  $\nu_0$  vérifie :*

$$U_0 = \mathbf{E}(Z_{\nu_0} | \mathcal{F}_0) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbf{E}(Z_{\nu} | \mathcal{F}_0).$$

Si  $Z_n$  s'interprète comme la somme des gains d'un joueur après  $n$  parties d'un jeu de hasard, on voit que s'arrêter de jouer à l'instant  $\nu_0$  permet de maximiser le gain moyen sachant  $\mathcal{F}_0$ .

**Démonstration :** Puisque  $U^{\nu_0}$  est une martingale, on a :

$$U_0 = U_0^{\nu_0} = \mathbf{E}(U_N^{\nu_0} | \mathcal{F}_0) = \mathbf{E}(U_{\nu_0} | \mathcal{F}_0) = \mathbf{E}(Z_{\nu_0} | \mathcal{F}_0).$$

Par ailleurs, si  $\nu \in \mathcal{T}_{0,N}$  la suite arrêtée  $U^{\nu}$  est une surmartingale. D'où :

$$\begin{aligned} U_0 &\geq \mathbf{E}(U_N^{\nu} | \mathcal{F}_0) = \mathbf{E}(U_{\nu} | \mathcal{F}_0) \\ &\geq \mathbf{E}(Z_{\nu} | \mathcal{F}_0), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. ■

**Remarque 2.3** Une généralisation immédiate du corollaire 2.2 donne :

$$\begin{aligned} U_n &= \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbf{E}(Z_{\nu} | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbf{E}(Z_{\nu_n} | \mathcal{F}_n), \end{aligned}$$

où  $\nu_n = \inf\{j \geq n | U_j = Z_j\}$ .

**Définition 2.4** On appelle temps d'arrêt optimal pour la suite  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$  tout temps d'arrêt  $\nu$  tel que :

$$\mathbf{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0) = \sup_{T_{0,N}} \mathbf{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0)$$

Il résulte de ce qui précède que  $\nu_0$  est un temps d'arrêt optimal. Le résultat suivant donne une caractérisation des temps d'arrêt optimaux qui montre que  $\nu_0$  est le plus petit temps d'arrêt optimal.

**Théorème 2.5** Un temps d'arrêt  $\nu$  est optimal si et seulement si :

$$\begin{cases} Z_\nu = U_\nu \\ \text{et } (U_{\nu \wedge n})_{0 \leq n \leq N} \text{ est une martingale.} \end{cases} \quad (2.1)$$

**Démonstration :** Si la suite arrêtée  $U^\nu$  est une martingale, on a  $U_0 = \mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0)$  et par conséquent, si (2.1) est vérifié,  $U_0 = \mathbf{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0)$ , ce qui, compte tenu du corollaire 2.2, entraîne l'optimalité de  $\nu$ .

Réciproquement, si  $\nu$  est optimal, on a :

$$U_0 = \mathbf{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0) \leq \mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0).$$

Mais, puisque  $U^\nu$  est une surmartingale :

$$\mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) \leq U_0.$$

D'où :

$$\mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) = \mathbf{E}(Z_\nu | \mathcal{F}_0)$$

et puisque  $U_\nu \geq Z_\nu$ ,  $U_\nu = Z_\nu$ .

De l'égalité  $\mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) = U_0$  et des inégalités :

$$U_0 \geq \mathbf{E}(U_{\nu \wedge n} | \mathcal{F}_0) \geq \mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0)$$

(qui résultent du fait que  $(U_n^\nu)$  est une surmartingale) on déduit aussi :

$$\mathbf{E}(U_{\nu \wedge n} | \mathcal{F}_0) = \mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_0) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_0).$$

Mais on a  $U_{\nu \wedge n} \geq \mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_n)$ , d'où  $U_{\nu \wedge n} = \mathbf{E}(U_\nu | \mathcal{F}_n)$ , ce qui prouve que  $(U_n^\nu)$  est une martingale. ■

### 3 Décomposition des surmartingales

La décomposition suivante (classiquement appelée "décomposition de Doob") permet, dans les modèles de marchés viables et complets, d'associer à toute surmartingale une stratégie de gestion dans laquelle la consommation est autorisée (voir à ce sujet l'exercice 5).

**Proposition 3.1** Toute surmartingale  $(U_n)_{0 \leq n \leq N}$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$U_n = M_n - A_n$$

où  $(M_n)$  est une martingale et  $(A_n)$  un processus croissant, prévisible, nul en 0.

**Démonstration :** Il est clair que le seul choix possible pour  $n = 0$  est  $M_0 = U_0$  et  $A_0 = 0$ . On doit ensuite avoir :

$$U_{n+1} - U_n = M_{n+1} - M_n - (A_{n+1} - A_n).$$

D'où, en conditionnant par rapport à  $\mathcal{F}_n$  et en utilisant les propriétés de  $M$  et  $A$  :

$$-(A_{n+1} - A_n) = \mathbf{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n) - U_n$$

et

$$M_{n+1} - M_n = U_{n+1} - \mathbf{E}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n).$$

$(M_n)$  et  $(A_n)$  sont ainsi déterminés de manière unique et on voit que  $(M_n)$  est bien une martingale et que  $(A_n)$  est bien prévisible et croissant (parce que  $(U_n)$  est une surmartingale).

■

Supposons maintenant que  $(U_n)$  soit l'enveloppe de Snell d'une suite adaptée  $(Z_n)$ . On peut alors caractériser le plus grand temps d'arrêt optimal pour  $(Z_n)$  à l'aide du processus croissant  $(A_n)$  intervenant dans la décomposition de Doob de  $(U_n)$  :

**Proposition 3.2** *Le plus grand temps d'arrêt optimal pour  $(Z_n)$  est donné par :*

$$\nu_{\max} = \begin{cases} N & \text{si } A_N = 0 \\ \inf\{n, A_{n+1} \neq 0\} & \text{si } A_N \neq 0. \end{cases}$$

**Démonstration :** On voit facilement que  $\nu_{\max}$  est un temps d'arrêt en utilisant le fait que  $(A_n)_{0 \leq n \leq N}$  est prévisible. De l'égalité  $U_n = M_n - A_n$  et du fait que  $A_j = 0$ , pour  $j \leq \nu_{\max}$ , on déduit que  $U^{\nu_{\max}} = M^{\nu_{\max}}$  ce qui entraîne que  $U^{\nu_{\max}}$  est une martingale. Pour avoir l'optimalité, il suffit par conséquent de montrer l'égalité :

$$U_{\nu_{\max}} = Z_{\nu_{\max}}.$$

Or :

$$\begin{aligned} U_{\nu_{\max}} &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{1}_{\{\nu_{\max} = j\}} U_j + \mathbf{1}_{\{\nu_{\max} = N\}} U_N \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{1}_{\{\nu_{\max} = j\}} \max(Z_j, \mathbf{E}(U_{j+1} | \mathcal{F}_j)) + \mathbf{1}_{\{\nu_{\max} = N\}} Z_N, \end{aligned}$$

On a  $\mathbf{E}(U_{j+1} | \mathcal{F}_j) = M_j - A_{j+1}$  et, sur l'ensemble  $\{\nu_{\max} = j\}$ ,  $A_j = 0$  et  $A_{j+1} > 0$ , donc  $U_j = M_j$  et  $\mathbf{E}(U_{j+1} | \mathcal{F}_j) = M_j - A_{j+1} < U_j$ . Par suite  $U_j = \max(Z_j, \mathbf{E}(U_{j+1} | \mathcal{F}_j)) = Z_j$ . D'où finalement :

$$U_{\nu_{\max}} = Z_{\nu_{\max}}.$$

Il reste à démontrer que c'est le plus grand temps d'arrêt optimal. Cela résulte du fait que si  $\nu$  est un temps d'arrêt vérifiant  $\nu \geq \nu_{\max}$  et  $\mathbf{P}(\nu > \nu_{\max}) > 0$ , alors

$$\mathbf{E}(U_\nu) = \mathbf{E}(M_\nu) - \mathbf{E}(A_\nu) = \mathbf{E}(U_0) - \mathbf{E}(A_\nu) < \mathbf{E}(U_0)$$

et par conséquent  $U^\nu$  ne peut pas être une martingale. ■

## 4 Enveloppe de Snell et chaînes de Markov

Le but de ce paragraphe est de montrer comment, dans un cadre markovien, les calculs d'enveloppes de Snell peuvent être menés à bien. Une suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini  $E$  est appelée chaîne de Markov si, pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tous éléments  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x, y$  de  $E$ , on a :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) = \mathbf{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$$

La chaîne est dite *homogène* si le nombre  $P(x, y) = \mathbf{P}(X_{n+1} = y | X_n = x)$  ne dépend pas de  $n$ . La matrice  $P = (P(x, y))_{(x, y) \in E \times E}$ , indexée par  $E \times E$ , est alors appelée matrice de transition de la chaîne. La matrice  $P$  a des coefficients positifs ou nuls et vérifie :  $\sum_{y \in E} P(x, y) = 1$ , pour tout  $x \in E$  ; on dit que c'est une matrice stochastique. Lorsqu'on travaille sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, \mathbf{P})$ , on définit la notion de chaîne de Markov par rapport à la filtration :

**Définition 4.1** Une suite  $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$  de variables aléatoires à valeurs dans ensemble  $E$  est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $P$  par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$  si  $(X_n)$  est adaptée et si pour toute fonction  $f$  de  $E$  dans  $\mathbf{R}$ , on a :

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = Pf(X_n)$$

où  $Pf$  désigne la fonction qui à  $x \in E$  associe  $Pf(x) = \sum_{y \in E} P(x, y)f(y)$ .

Noter que si l'on interprète les fonctions de  $E$  dans  $\mathbf{R}$  comme des matrices unicolonnes indexées par  $E$ ,  $Pf$  est bien le produit des deux matrices  $P$  et  $f$ . On vérifie facilement qu'une chaîne de Markov au sens élémentaire est une chaîne de Markov par rapport à sa filtration naturelle, définie par :  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ .

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition précédente et de la définition de l'enveloppe de Snell.

**Proposition 4.2** Soit  $(Z_n)$  une suite adaptée définie par  $Z_n = \psi(n, X_n)$ , où  $(X_n)$  est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition  $P$ , à valeurs dans  $E$  et  $\psi$  une fonction de  $\mathbf{N} \times E$  dans  $\mathbf{R}$ . Alors, l'enveloppe de Snell  $(U_n)$  de la suite  $(Z_n)$  est donnée par  $U_n = u(n, X_n)$ , où la fonction  $u$  est définie par les relations suivantes :

$$u(N, x) = \psi(N, x) \quad \forall x \in E$$

et, pour  $n \leq N - 1$ ,

$$u(n, \cdot) = \max(\psi(n, \cdot), Pu(n+1, \cdot)).$$

## 5 Application aux options américaines

Nous nous plaçons maintenant dans un modèle de marché viable et complet, construit sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}, \mathbf{P})$  et, comme dans les paragraphes 3.1 et 3.3 du chapitre 1, nous noterons  $\mathbf{P}^*$  l'unique probabilité sous laquelle les actifs actualisés sont des martingales.



## 5.1 Exercice et couverture des options américaines

Dans le paragraphe 3.3 du chapitre 1, nous avons défini la valeur  $(U_n)$  d'une option américaine décrite par une suite  $(Z_n)$ , par les relations :

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max \left( Z_n, S_n^0 \mathbf{E}^* \left( \frac{U_{n+1}}{S_{n+1}^0} \middle| \mathcal{F}_n \right) \right) \quad \forall n \leq N-1. \end{cases}$$

La suite  $(\tilde{U}_n)$  définie par  $\tilde{U}_n = U_n / S_n^0$  (valeur actualisée de l'option) est donc l'enveloppe de Snell sous  $\mathbf{P}^*$  de la suite  $(\tilde{Z}_n)$ . Il résulte du paragraphe 2 ci-dessus que l'on a :

$$\tilde{U}_n = \sup_{\nu \in \mathcal{I}_{n,N}} \mathbf{E}^* (\tilde{Z}_\nu | \mathcal{F}_n)$$

et par conséquent :

$$U_n = S_n^0 \sup_{\nu \in \mathcal{I}_{n,N}} \mathbf{E}^* \left( \frac{Z_\nu}{S_\nu^0} \middle| \mathcal{F}_n \right).$$

D'après le paragraphe 3, on peut écrire :

$$\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n,$$

où  $(\tilde{M}_n)$  est une  $\mathbf{P}^*$  martingale et  $(\tilde{A}_n)$  est un processus croissant prévisible nul en 0. Puisque le marché est complet, il existe une stratégie autofinancée  $\phi$  telle que :

$$V_N(\phi) = S_N^0 \tilde{M}_N,$$

c'est à dire  $\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_N$ . Comme la suite  $(\tilde{V}_n(\phi))$  est une  $\mathbf{P}^*$ -martingale, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(\phi) &= \mathbf{E}^* (\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbf{E}^* (\tilde{M}_N | \mathcal{F}_n) \\ &= \tilde{M}_n, \end{aligned}$$

et, par conséquent :

$$\tilde{U}_n = \tilde{V}_n(\phi) - \tilde{A}_n.$$

D'où :

$$U_n = V_n(\phi) - A_n,$$

où  $A_n = S_n^0 \tilde{A}_n$ . Il est clair sur cette expression que le vendeur de l'option peut se couvrir parfaitement puisque, en encaissant la prime  $U_0 = V_0(\phi)$ , il peut produire une richesse égale à l'instant  $n$  à  $V_n(\phi)$  qui majore  $U_n$  donc  $Z_n$ .

Quelle est la date d'exercice optimale pour l'acheteur de l'option ? La date d'exercice est à choisir parmi tous les temps d'arrêt. Le détenteur de l'option n'a pas intérêt à exercer à un instant  $n$  où  $U_n > Z_n$ , car il perdrait un actif de valeur  $U_n$  (l'option) contre une richesse égale à  $Z_n$  (venant de l'exercice de l'option). Donc une date  $\tau$  d'exercice optimal vérifie  $U_\tau = Z_\tau$ . Par ailleurs, il n'a pas intérêt à exercer après l'instant

$$\nu_{\max} = \inf \{j, A_{j+1} \neq 0\}$$

(qui est égal à  $\inf \{j, \tilde{A}_{j+1} \neq 0\}$ ), car, à cet instant, en vendant l'option, il peut se constituer une richesse égale à  $U_{\nu_{\max}} = V_{\nu_{\max}}(\phi)$  et, en suivant à partir de cet instant la stratégie  $\phi$ , il se

constitue un portefeuille dont la valeur est strictement plus grande que celle de l'option aux instants  $\nu_{\max} + 1, \nu_{\max} + 2, \dots, N$ . On impose donc, comme seconde condition  $\tau \leq \nu_{\max}$ , ce qui permet de dire que  $\tilde{U}^\tau$  est une martingale. La conclusion de ce qui précède est que les dates d'exercice optimales sont les temps d'arrêt optimaux pour la suite  $(\tilde{Z}_n)$ , sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ . Pour préciser ce point, reprenons le point de vue du vendeur de l'option. Si celui-ci se couvre suivant la stratégie  $\phi$  définie plus haut et si l'acheteur exerce à un instant  $\tau$  qui n'est pas optimal, on a  $U_\tau > Z_\tau$  ou  $A_\tau > 0$ . Dans les deux cas, le vendeur réalise un profit  $V_\tau(\phi) - Z_\tau = U_\tau + A_\tau - Z_\tau$ , qui est strictement positif.

## 5.2 Options américaines et options européennes

**Proposition 5.1** Soit  $C_n$  la valeur à l'instant  $n$  d'une option américaine décrite par une suite adaptée  $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$  et soit  $c_n$  la valeur à l'instant  $n$  de l'option européenne définie par la variable aléatoire  $\mathcal{F}_N$ -mesurable  $h = Z_N$ . Alors, on a :  $C_n \geq c_n$ .

De plus, si  $c_n \geq Z_n$ , pour tout  $n$ , alors :

$$c_n = C_n \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

L'inégalité  $C_n \geq c_n$  est bien naturelle puisque l'option américaine donne plus de droits que l'option européenne.

**Démonstration :** Puisque la valeur actualisée  $(\tilde{C}_n)$  est une surmartingale sous  $\mathbf{P}^*$ , on a :

$$\tilde{C}_n \geq \mathbf{E}^* (\tilde{C}_N | \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}^* (\tilde{c}_N | \mathcal{F}_n) = \tilde{c}_n$$

D'où, l'inégalité :  $C_n \geq c_n$ .

Si on a  $c_n \geq Z_n$ , pour tout  $n$ , alors la suite  $(\tilde{c}_n)$ , qui est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ , apparaît comme une surmartingale (sous  $\mathbf{P}^*$ ) majorant la suite  $(\tilde{Z}_n)$  et par conséquent :

$$\tilde{C}_n \leq \tilde{c}_n \quad \forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$$

D'où l'égalité. ■

**Remarque 5.2** On vérifiera sans peine que si les relations de la proposition 5.1 n'étaient pas vérifiées, il y aurait des opportunités d'arbitrage par des transactions sur les options.

Pour illustrer la proposition qui précède, plaçons-nous dans le cas d'un marché avec un seul actif risqué, de prix  $S_n$  à l'instant  $n$  et un taux d'intérêt sans risque constant, égal à  $r \geq 0$  sur chaque période, de sorte que  $S_n^0 = (1 + r)^n$ . Alors si, avec les notations de la proposition 5.1, on prend  $Z_n = (S_n - K)_+$ ,  $c_n$  est le prix, à la date  $n$ , d'un call européen d'échéance  $N$  et de prix d'exercice  $K$  sur une unité d'actif risqué et  $C_n$  est le prix du call américain correspondant. On a :

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= (1 + r)^{-N} \mathbf{E}^* ((S_N - K)_+ | \mathcal{F}_n) \\ &\geq \mathbf{E}^* (\tilde{S}_N - K(1 + r)^{-N} | \mathcal{F}_n) \\ &= \tilde{S}_n - K(1 + r)^{-N}, \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de martingale de  $(\tilde{S}_n)$ . D'où :  $c_n \geq S_n - K(1 + r)^{-(N-n)} \geq S_n - K$ , puisque  $r \geq 0$ . Comme  $c_n \geq 0$ , on a aussi  $c_n \geq (S_n - K)_+$  et par la proposition 5.1,  $C_n = c_n$ . Il y a donc égalité entre le prix du call européen et le prix du call américain correspondant.

Cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas du put, ni dans le cas de calls sur devises ou sur actions distribuant des dividendes.

**Remarque bibliographique :** Pour des compléments sur l'enveloppe de Snell et l'arrêt optimal, on pourra consulter [Nev72] (chapitre VI) et [DCD83] (chapitre 5, paragraphe 1). Pour la théorie de l'arrêt optimal à temps continu, voir [Kar81].

## 6 Exercices

**Exercice 1** Soit  $\nu$  un temps d'arrêt par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ . On note  $\mathcal{F}_\nu$  l'ensemble des événements  $A$  tels que  $A \cap \{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n$ , pour tout  $n \in \{0, \dots, N\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}_\nu$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}_N$ .  $\mathcal{F}_\nu$  est souvent appelée "tribu des événements antérieurs à  $\nu$ ".
2. Montrer que la variable aléatoire  $\nu$  est  $\mathcal{F}_\nu$ -mesurable.
3. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle. Montrer l'égalité :

$$\mathbf{E}(X|\mathcal{F}_\nu) = \sum_{j=0}^N \mathbf{1}_{\{\nu = j\}} \mathbf{E}(X|\mathcal{F}_j)$$

4. Soit  $\tau$  un temps d'arrêt tel que  $\tau \geq \nu$ . Montrer que  $\mathcal{F}_\nu \subset \mathcal{F}_\tau$ .
5. Sous les mêmes hypothèses, montrer que si  $(M_n)$  une martingale, on a

$$M_\nu = \mathbf{E}(M_\tau|\mathcal{F}_\nu).$$

(On pourra traiter le cas  $\tau = N$  d'abord.)

**Exercice 2** Soit  $(U_n)$  l'enveloppe de Snell d'une suite adaptée  $(Z_n)$ . Montrer, sans supposer  $\mathcal{F}_0$  triviale que :

$$\mathbf{E}(U_0) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbf{E}(Z_\nu),$$

et plus généralement que :

$$\mathbf{E}(U_n) = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{n,N}} \mathbf{E}(Z_\nu).$$

**Exercice 3** Montrer que  $\nu$  est optimal au sens de la définition 2.4 si et seulement si :

$$\mathbf{E}(Z_\nu) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbf{E}(Z_\tau).$$

**Exercice 4** L'objet de cet exercice est d'étudier le put américain dans le modèle de Cox-Ross-Rubinstein. Les notations sont celles du chapitre 1.

1. Montrer que le prix  $\mathcal{P}_n$ , à l'instant  $n$ , du put américain d'échéance  $N$ , de prix d'exercice  $K$  sur une action peut s'écrire :

$$\mathcal{P}_n = P_{\text{am}}(n, S_n)$$

où  $P_{\text{am}}(n, x)$  est définie par  $P_{\text{am}}(N, x) = (K - x)_+$  et, pour  $n \leq N - 1$

$$P_{\text{am}}(n, x) = \max \left( (K - x)_+, \frac{f(n+1, x)}{1+r} \right),$$

avec  $f(n+1, x) = pP_{\text{am}}(n+1, x(1+a)) + (1-p)P_{\text{am}}(n+1, x(1+b))$  et  $p = \frac{b-r}{b-a}$ .

2. Montrer que la fonction  $P_{\text{am}}(0, \cdot)$  peut se mettre sous la forme :

$$P_{\text{am}}(0, x) = \sup_{v \in \mathcal{T}_{0, N}} \mathbf{E}^* \left( (1+r)^{-v} (K - xV_v)_+ \right),$$

où la suite de variables aléatoires  $(V_n)_{0 \leq n \leq N}$  est définie par :  $V_0 = 1$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $V_n = \prod_{i=1}^n U_i$ , où les  $U_i$  sont des variables aléatoires dont on précisera la loi conjointe sous  $\mathbf{P}^*$ .

3. A partir de la formule de la question précédente, montrer que la fonction  $x \mapsto P_{\text{am}}(0, x)$  est convexe et décroissante.
4. On suppose  $\alpha < 0$ . Montrer qu'il existe un réel  $x^* \in [0, K]$  tel que, pour  $x \leq x^*$ ,  $P_{\text{am}}(0, x) = (K - x)_+$  et, pour  $x \in ]x^*, K/(1 + \alpha)^N[$ ,  $P_{\text{am}}(0, x) > (K - x)_+$ .
5. Un agent détient le put américain à l'instant 0. Pour quelles valeurs du cours spot  $S_0$  a-t-il intérêt à exercer immédiatement son option ?
6. Montrer que la stratégie de couverture du put américain est définie par une quantité d'actif risqué  $H_n = \Delta(n, S_{n-1})$  à détenir à l'instant  $n$ , où  $\Delta$  est une fonction que l'on exprimera à partir de la fonction  $P_{\text{am}}$ .

**Exercice 5 Stratégies de consommation.** Les stratégies autofinancées définies au chapitre 1 excluent toute possibilité de consommation. On peut introduire des stratégies de consommation de la façon suivante : à l'instant  $n$ , après avoir pris connaissance des cours  $S_n^0, \dots, S_n^d$ , l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition  $\phi_n$  à la composition  $\phi_{n+1}$  et décide de la richesse  $\gamma_{n+1}$  qui sera consommée à la date  $n + 1$ . Le réajustement se faisant aux cours de la date  $n$ , s'il n'y a pas d'apports de fonds extérieurs, on doit avoir :

$$\phi_{n+1} \cdot S_n = \phi_n \cdot S_n - \gamma_{n+1}. \quad (2.2)$$

Une stratégie de gestion avec consommation sera donc définie par un couple  $(\phi, \gamma)$ , où  $\phi$  est un processus prévisible à valeurs dans  $\mathbf{R}^{d+1}$ , représentant les quantités d'actifs détenues en portefeuille et  $\gamma = (\gamma_n)_{1 \leq n \leq N}$  un processus prévisible à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$ , représentant la richesse consommée à chaque instant, les processus  $\phi$  et  $\gamma$  étant liés par la relation (2.2), qui remplace la condition d'autofinancement du chapitre 1.

1. Soit  $\phi$  un processus prévisible à valeurs dans  $\mathbf{R}^{d+1}$  et soit  $\gamma$  un processus prévisible à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$ . On pose  $V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n$  et  $\tilde{V}_n(\phi) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Le couple  $(\phi, \gamma)$  définit une stratégie de gestion avec consommation.
- (b) Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta S_j - \sum_{j=1}^n \gamma_j.$$

- (c) Pour tout  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j - \sum_{j=1}^n \gamma_j / S_{j-1}^0.$$

2. Dans toute la suite, on suppose le marché viable et complet et on note  $\mathbf{P}^*$  l'unique probabilité sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Montrer que si le couple  $(\phi, \gamma)$  définit une stratégie de gestion avec consommation, alors  $(\tilde{V}_n(\phi))$  est une surmartingale sous  $\mathbf{P}^*$ .

3. Soit  $(U_n)$  une suite adaptée telle que  $(\tilde{U}_n)$  soit une surmartingale sous  $\mathbf{P}^*$ . Montrer, en utilisant la décomposition de Doob, qu'il existe une stratégie de gestion avec consommation  $(\phi, \gamma)$  telle que  $V_n(\phi) = U_n$ , pour tout  $n \in \{0, \dots, N\}$ .
4. Soit  $(Z_n)$ , une suite adaptée. On dit qu'une stratégie de gestion avec consommation  $(\phi, \gamma)$  couvre l'option américaine définie par  $(Z_n)$  si  $V_n(\phi) \geq Z_n$ , pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ . Montrer que la valeur  $(U_n)$  de l'option américaine est la valeur d'au moins une stratégie de gestion avec consommation qui couvre  $(Z_n)$  et que toute stratégie de gestion avec consommation  $(\phi, \gamma)$  qui couvre  $(Z_n)$  vérifie  $V_n(\phi) \geq U_n$ , pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ .
5. Soit  $x$  un nombre positif, représentant la richesse initiale d'un investisseur et soit  $\gamma = (\gamma_n)_{1 \leq n \leq N}$  une suite prévisible à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$ . On dira que le processus de consommation  $(\gamma_n)$  est finançable à partir de la richesse initiale  $x$  s'il existe un processus prévisible  $\phi$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^{d+1}$  tel que le couple  $(\phi, \gamma)$  définisse une stratégie de gestion avec consommation, avec, de plus :  $V_0(\phi) = x$  et  $V_n(\phi) \geq 0$ , pour tout  $n \in \{0, \dots, N\}$ . Montrer que  $(\gamma_n)$  est finançable à partir de la richesse initiale  $x$ , si et seulement si : 
$$\mathbf{E}^* \left( \sum_{j=1}^N \gamma_j / S_{j-1}^0 \right) \leq x.$$



# Chapitre 3

## Mouvement brownien et équations différentielles stochastiques

Les deux premiers chapitres de ce livre ont été consacrés à l'étude de modèles à temps discret. On a vu à cette occasion l'importance des notions de martingales, de stratégies autofinancées... Nous allons étendre ces notions au cas du temps continu. En particulier, nous introduirons les outils mathématiques permettant de construire des modèles d'évolution d'actif et de calculer les prix d'options. Les outils techniques sont plus délicats à utiliser en temps continu mais les idées essentielles diffèrent peu de celles du temps discret.

Pourquoi considère-t-on des modèles à temps continu ? La première motivation vient des phénomènes que l'on veut modéliser : les variations des cotations sur les marchés organisés sont en pratique tellement fréquentes qu'un modèle à temps discret peut difficilement en rendre compte. D'autre part les modèles continus conduisent à des méthodes de calcul plus explicites que les modèles discrets, même s'il faut parfois avoir recours à des méthodes numériques. Ainsi, le modèle le plus utilisé dans la pratique (le modèle de Black et Scholes) est un modèle à temps continu qui conduit à une formule simple. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, les liens entre processus stochastiques et finance ne sont pas nouveaux : en 1901, Bachelier (voir [Bac00]) dans un mémoire intitulé "Théorie de la spéculation" est, non seulement l'un des premiers à s'intéresser mathématiquement aux propriétés du mouvement brownien, mais aussi à donner des formules de calcul de prix pour certaines options.

Nous donnons quelques éléments mathématiques nécessaires à la compréhension des modèles à temps continu. En particulier, nous introduirons le mouvement brownien, qui est l'outil majeur du modèle de Black et Scholes et sert à construire la plupart des modèles d'actifs en finance. Puis nous étendrons la notion de martingale au cas du temps continu, enfin nous construirons l'intégrale stochastique d'Itô et nous introduirons le calcul différentiel qui lui est associé : le calcul d'Itô.

Certaines démonstrations sont rédigées en petits caractères, ce sont des démonstrations techniques qu'il est conseillé de sauter lors d'une première lecture.

## 1 Généralités sur les processus à temps continu

Commençons par préciser ce que l'on entend par *processus* à temps continu.

**Définition 1.1** *On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace  $E$  muni d'une tribu  $\mathcal{E}$ , une famille  $(X_t)_{t \in \mathbf{R}^+}$  de variables aléatoires sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ .*

**Remarque 1.2** – Dans la pratique l'indice  $t$  représente le temps.

- Un processus peut aussi être vu comme une fonction aléatoire : à chaque  $\omega$  dans  $\Omega$  on associe la fonction de  $\mathbf{R}^+$  dans  $E$ ,  $t \rightarrow X_t(\omega)$ , appelée *trajectoire* du processus.
- Un processus peut être considéré comme une application de  $\mathbf{R}^+ \times \Omega$  dans  $E$ , nous supposons toujours que cette application est mesurable lorsque l'on munit  $\mathbf{R}^+ \times \Omega$  de la tribu  $\mathcal{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathcal{A}$  et  $E$  de la tribu  $\mathcal{E}$ .
- On considérera aussi des processus indexés par un intervalle de temps  $[0, T]$  borné.

Comme dans le cas discret, on introduit la notion de *filtration*.

**Définition 1.3** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité, une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est une famille croissante de sous tribus de  $\mathcal{A}$ .

Le tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information dont on dispose à l'instant  $t$ . On dit qu'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est *adapté* à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , si pour chaque  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

**Remarque 1.4** Dans la suite, les filtrations que l'on considérera, auront la propriété suivante :

$$\text{Si } A \in \mathcal{A} \text{ et si } \mathbf{P}(A) = 0, \text{ alors pour tout } t, A \in \mathcal{F}_t.$$

Ceci exprime que  $\mathcal{F}_t$  contient tous les ensembles de mesure nulle de  $\mathcal{A}$ . Le but de cette hypothèse technique est de permettre d'affirmer que si  $X = Y$   $\mathbf{P}$  p.s. et que  $Y$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable alors  $X$  est aussi  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

On peut construire une filtration à partir d'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  en posant  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ . Cette filtration ne vérifie pas, en général, l'hypothèse précédente. Cependant si on remplace la tribu  $\mathcal{F}_t$  par la tribu  $\bar{\mathcal{F}}_t$  engendrée par  $\mathcal{F}_t$  et  $\mathcal{N}$ , l'ensemble des ensembles de probabilité nulle (on dit aussi négligeables) de  $\mathcal{A}$ , on obtient une filtration vérifiant la condition souhaitée. On appelle cette filtration la *filtration naturelle* du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Quand on parle de filtration pour un processus sans autres précisions, il s'agit de sa filtration naturelle. Un processus est bien sûr adapté à sa filtration naturelle.

La notion de *temps d'arrêt* nous sera utile comme dans le cas discret. Un temps d'arrêt modélise un temps aléatoire qui dépend du processus de façon non anticipante (à un instant donné  $t$  on "sait" si un temps d'arrêt est plus petit que  $t$ ). Formellement, la définition est la suivante :

**Définition 1.5** On appelle temps d'arrêt par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une variable aléatoire  $\tau$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$  telle que, pour tout  $t \geq 0$  :

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

On associe à un temps d'arrêt  $\tau$  une tribu que l'on note  $\mathcal{F}_\tau$ , définie par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A}, \text{ pour tout } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Cette tribu représente les informations disponibles avant l'instant aléatoire  $\tau$ . On démontre que (voir exercices 8,9,10, 11,14) :

**Proposition 1.6** – Si  $S$  est un temps d'arrêt,  $S$  est  $\mathcal{F}_S$  mesurable.

- Si  $S$  est un temps d'arrêt, fini presque sûrement, et  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus adapté continu, alors  $X_S$  est  $\mathcal{F}_S$  mesurable.
- Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt tels que  $S \leq T$   $\mathbf{P}$  p.s., alors  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ .
- Si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt alors  $S \wedge T = \inf(S, T)$  est un temps d'arrêt. En particulier si  $S$  est un temps d'arrêt et  $t$  est un temps déterministe  $S \wedge t$  est un temps d'arrêt.



## 2 Le mouvement brownien

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le *mouvement brownien*. Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt.

**Définition 2.1** On appelle mouvement brownien un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :

- continuité : **P** p.s. la fonction  $s \mapsto X_s(\omega)$  est une fonction continue.
- indépendance des accroissements : Si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$ .
- stationnarité des accroissements : si  $s \leq t$ , la loi de  $X_t - X_s$  est identique à celle de  $X_{t-s} - X_0$ .

Cette définition permet de caractériser la loi de la variable aléatoire  $X_t$ . Ce résultat est délicat à établir, nous renvoyons à [GS80] pour sa démonstration.

**Théorème 2.2** Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien, alors  $X_t - X_0$  est une variable aléatoire gaussienne de moyenne  $rt$  et de variance  $\sigma^2 t$ ,  $r$  et  $\sigma$  étant des constantes réelles.

**Remarque 2.3** Un mouvement brownien est dit *standard* si :

$$X_0 = 0 \quad \mathbf{P} \text{ p.s.} \quad \mathbf{E}(X_t) = 0, \quad \mathbf{E}(X_t^2) = t.$$

Dans la suite, lorsque l'on parlera de mouvement brownien, sans autre précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard. Dans ce cas, la loi de  $X_t$  prend la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

$dx$  étant la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}$ .

On peut démontrer une propriété précisant le caractère gaussien du mouvement brownien. On vient de voir que pour tout  $t$ ,  $X_t$  est une variable aléatoire gaussienne. On a une propriété plus forte :

**Théorème 2.4** Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien, si  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$  alors  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est un vecteur gaussien.

On pourra consulter l'appendice page 161 pour des précisions sur les vecteurs gaussiens.

**Démonstration :** Soit  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , alors le vecteur aléatoire  $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$  est composé de variables aléatoires gaussiennes (d'après le théorème 2.2) et indépendantes (par définition du mouvement brownien), ce vecteur est donc un vecteur gaussien. Il en est donc de même pour  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ . ■

On aura besoin d'une définition légèrement plus précise d'un mouvement brownien par rapport à une tribu  $\mathcal{F}_t$ .

**Définition 2.5** On appellera  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie :

- Pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.
- Si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_s$ .
- Si  $s \leq t$ , la loi de  $X_t - X_s$  est identique à celle de  $X_{t-s} - X_0$ .

**Remarque 2.6** Le premier point de la définition précédente prouve que  $\sigma(X_u, u \leq t) \subset \mathcal{F}_t$ . De plus, il est facile de vérifier qu'un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle.

### 3 Martingales à temps continu

Comme dans le cas des modèles à temps discret, la notion de martingale est un outil essentiel pour expliciter la notion d'arbitrage. La définition suivante est une extension de celle du temps discret.

**Définition 3.1** Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé et  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration de cet espace. Une famille adaptée  $(M_t)_{t \geq 0}$  de variables aléatoires intégrables, (c'est-à-dire vérifiant  $\mathbf{E}(|M_t|) < +\infty$  pour tout  $t$ ) est :

- une martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ .
- une surmartingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \leq M_s$ .
- une sousmartingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \geq M_s$ .

**Remarque 3.2** On déduit de cette définition que, si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, alors  $\mathbf{E}(M_t) = \mathbf{E}(M_0)$ , pour tout  $t$ .

Donnons des exemples de martingales que l'on peut construire à partir du mouvement brownien.

**Proposition 3.3** Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien standard :

1.  $X_t$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.
2.  $X_t^2 - t$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.
3.  $\exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.

**Démonstration :** Si  $s \leq t$  alors  $X_t - X_s$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{F}_s$ . Donc  $\mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(X_t - X_s)$ . Mais un mouvement brownien standard est centré, donc  $\mathbf{E}(X_t - X_s) = 0$ . On en déduit le premier point. Pour démontrer le deuxième, remarquons que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}\left((X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s) | \mathcal{F}_s\right) \\ &= \mathbf{E}\left((X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s\right) + 2X_s \mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s), \end{aligned}$$

mais comme  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale  $\mathbf{E}(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = 0$ , et donc :

$$\mathbf{E}(X_t^2 - X_s^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\left((X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s\right).$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement brownien permettent de plus d'affirmer que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left((X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s\right) &= \mathbf{E}(X_{t-s}^2) \\ &= t - s. \end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que  $X_t$  suit une loi gaussienne centrée de variance  $t$ . On en déduit que  $\mathbf{E}(X_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = X_s^2 - s$ , si  $s < t$ .

Pour démontrer le dernier point, rappelons, tout d'abord, que, si  $g$  est une gaussienne centrée réduite, on a :

$$\mathbf{E}(e^{\lambda g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\lambda^2/2}.$$

De plus, si  $s < t$  :

$$\mathbf{E}\left(e^{\sigma X_t - \sigma^2 t/2} | \mathcal{F}_s\right) = e^{\sigma X_s - \sigma^2 s/2} \mathbf{E}\left(e^{\sigma(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s\right)$$

car  $X_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable, et comme  $X_t - X_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( e^{\sigma(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s \right) &= \mathbf{E} \left( e^{\sigma(X_t - X_s)} \right) \\ &= \mathbf{E} \left( e^{\sigma X_{t-s}} \right) \\ &= \mathbf{E} \left( e^{\sigma g \sqrt{t-s}} \right) \\ &= e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé. ■

Si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, la relation  $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ , peut être étendue à des temps aléatoires si ces temps sont des *temps d'arrêt bornés*. Ce résultat est une extension de l'exercice 1 du chapitre 2 au cas continu et porte le nom de *théorème d'arrêt*. Nous admettons ce théorème et renvoyons à [KS88] page 19 pour sa démonstration.

**Théorème 3.4 (Théorème d'arrêt.)** *Si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale continue par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , et si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux temps d'arrêt tels que  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$ ,  $K$  étant une constante réelle finie, alors  $M_{\tau_2}$  est intégrable et :*

$$\mathbf{E}(M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} \quad \mathbf{P} \text{ p.s. .}$$

**Remarque 3.5** – Ce résultat entraîne que, si  $\tau$  est un temps d'arrêt borné, alors  $\mathbf{E}(M_\tau) = \mathbf{E}(M_0)$  (il suffit d'appliquer le théorème d'arrêt avec  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = \tau$  et de prendre l'espérance des deux membres).

– Si  $M_t$  est une sousmartingale, on a le même théorème en remplaçant l'égalité précédente par :

$$\mathbf{E}(M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) \geq M_{\tau_1} \quad \mathbf{P} \text{ p.s.}$$

Nous allons donner un exemple d'application de ce résultat au calcul des temps d'atteinte d'un point par le mouvement brownien.

**Proposition 3.6** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. Notons, si  $a$  est un nombre réel,  $T_a = \inf\{s \geq 0, X_s = a\}$ , ou  $+\infty$  si cet ensemble est vide.*

*Alors,  $T_a$  est un temps d'arrêt fini presque sûrement, dont la loi est caractérisée par sa transformée de Laplace :*

$$\mathbf{E} \left( e^{-\lambda T_a} \right) = e^{-\sqrt{2\lambda}|a|}.$$

**Démonstration :** Nous supposons que  $a \geq 0$ .  $T_a$  est un temps d'arrêt, en effet, comme  $X_s$  est continue :

$$\{T_a \leq t\} = \bigcap_{\epsilon \in \mathbf{Q}^{+*}} \left\{ \sup_{s \leq t} X_s > a - \epsilon \right\} = \bigcap_{\epsilon \in \mathbf{Q}^{+*}} \bigcup_{s \in \mathbf{Q}^+, s \leq t} \{X_s > a - \epsilon\}.$$

Ce dernier ensemble est dans  $\mathcal{F}_t$ , ce qui prouve le résultat. On notera dans ce qui suit  $x \wedge y = \inf(x, y)$ .

Nous allons appliquer le théorème d'arrêt à la martingale  $M_t = \exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)$ . On ne peut pas appliquer le théorème d'arrêt à  $T_a$  (qui n'est pas borné). Cependant, si  $n$  est un entier positif,  $T_a \wedge n$  est encore un temps d'arrêt (voir proposition 1.6), qui est borné, on peut donc appliquer le théorème d'arrêt. On obtient ainsi :

$$\mathbf{E}(M_{T_a \wedge n}) = 1.$$

Mais  $M_{T_a \wedge n} = e^{\sigma X_{T_a \wedge n} - \frac{\sigma^2}{2}(T_a \wedge n)} \leq \exp(\sigma a)$ . De plus, si  $T_a < +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{T_a \wedge n} = M_{T_a}$  et si  $T_a = +\infty$ , on a pour tout  $t$ ,  $X_t \leq a$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{T_a \wedge n} = 0$ . Le théorème de Lebesgue donne donc  $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} M_{T_a}) = 1$ , soit, comme  $X_{T_a} = a$  si  $T_a < +\infty$  :

$$\mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{T_a < +\infty\}} e^{-\frac{\sigma^2}{2} T_a} \right) = e^{-\sigma a}.$$

En faisant tendre  $\sigma$  vers 0 on obtient que  $\mathbf{P}(T_a < +\infty) = 1$  (ce qui signifie que le mouvement brownien atteint la valeur  $a$  presque sûrement) puis :

$$\mathbf{E} \left( e^{-\frac{\sigma^2}{2} T_a} \right) = e^{-\sigma a}.$$

On traite le cas  $a < 0$  en remarquant que :

$$T_a = \inf \{s \geq 0, -X_s = -a\},$$

avec  $(-X_t)_{t \geq 0}$  qui est un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien (car c'est un processus continu à accroissements indépendants et stationnaires de moyenne nulle et de variance  $t$ ). ■

Le théorème d'arrêt permet aussi d'obtenir des estimations pour le maximum d'une martingale. Si  $M_t$  est une martingale, on peut borner le moment d'ordre 2 de  $\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|$ . Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Doob.

**Théorème 3.7 (Inégalité de Doob)** *Si  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale continue, on a :*

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right) \leq 4\mathbf{E}(|M_T|^2).$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans l'exercice 13.

## 4 Intégrale stochastique et calcul d'Itô

Dans le cas des modèles à temps discret, la valeur actualisée d'un portefeuille de valeur initiale  $V_0$  et géré selon la stratégie autofinancée  $\phi = (H_n)_{0 \leq n \leq N}$  s'écrit :

$$V_0 + \sum_{j=1}^n H_j (\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}).$$

Cette valeur apparaît comme une *transformée de martingale* sous une probabilité pour laquelle le prix de l'actif actualisé  $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$  est une martingale. Dans le cas des modèles à temps continu, nous allons généraliser cette formule à l'aide d'intégrales du type  $\int_0^t H_s d\tilde{S}_s$ .

Cependant les modèles utilisés couramment pour décrire l'actif sont obtenus à partir du mouvement brownien. Or, une des propriétés importantes du mouvement brownien est que presque sûrement ses trajectoires sont nulle part différentiables. Autrement dit, si  $X_t$  est un mouvement brownien, il n'existe pas de points  $t$  de  $\mathbf{R}^+$  tels que  $\frac{dX_t}{dt}$  ait un sens. On ne peut donc pas définir l'intégrale précédente par :

$$\int_0^t f(s) dX_s = \int_0^t f(s) \frac{dX_s}{ds} ds.$$

On peut donner, cependant, un sens précis à ce type d'intégrales par rapport au mouvement brownien. C'est ce que nous allons faire dans ce paragraphe. On appelle ces intégrales des "intégrales stochastiques".

## 4.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ . Nous allons donner un sens à  $\int_0^t f(s, \omega) dW_s$  pour une classe de processus  $f(s, \omega)$  adaptés à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits *élémentaires*. Dans toute la suite, on fixe  $T$  un réel strictement positif et fini.

**Définition 4.1** On appelle processus élémentaire  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus de la forme :

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^p \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_{i-1}, t_i]}(t)$$

où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$  et  $\phi_i$  est  $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et bornée.

L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire  $H$  est alors, par définition, le processus continu  $(I(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par, si  $t \in ]t_k, t_{k+1}]$  :

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq k} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k}).$$

Notons que  $I(H)_t$  peut s'écrire :

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_i(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}),$$

ce qui prouve la continuité de la fonction  $t \mapsto I(H)_t$ . On notera  $\int_0^t H_s dW_s$  pour  $I(H)_t$ . On a alors le résultat essentiel suivant :

**Proposition 4.2** Si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus élémentaire :

- $(\int_0^t H_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale continue,
- $\mathbf{E} \left( \left( \int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right) = \mathbf{E} \left( \int_0^t H_s^2 ds \right)$ ,
- $\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2 \right) \leq 4 \mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right)$ .

**Démonstration :** Pour démontrer cette proposition nous allons utiliser des processus à temps discret. En effet, pour établir que  $(\int_0^t H_s dW_s)$  est une martingale, il suffit de prouver que, pour tout  $t > s$  :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^t H_u dW_u \middle| \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s H_u dW_u$$

Si l'on ajoute  $s$  et  $t$  à la subdivision  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_p = T$ , et si on pose  $M_n = \int_0^{t_n} H_s dW_s$  et  $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$  pour  $0 \leq n \leq p$ , il suffit de vérifier que  $M_n$  est une  $\mathcal{G}_n$ -martingale. Pour démontrer ceci, remarquons que :

$$M_n = \int_0^{t_n} H_s dW_s = \sum_{i=1}^n \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

avec  $\phi_i$  qui est  $\mathcal{G}_{i-1}$ -mesurable. D'autre part  $X_n = W_{t_n}$  est une  $\mathcal{G}_n$ -martingale (en effet,  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien).  $(M_n)_{n \in [0, p]}$  apparaît donc comme une transformée de la martingale  $(X_n)_{n \in [0, p]}$ . La proposition 2.3 du chapitre 1 prouve alors que c'est une martingale. Le deuxième point s'obtient, en remarquant que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M_n^2) &= \mathbf{E} \left( \left( \sum_{i=1}^n \phi_i (X_i - X_{i-1}) \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})) \end{aligned}$$

De plus, si  $i < j$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})) &= \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1}) | \mathcal{G}_{j-1})) \\ &= \mathbf{E}(\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1}) \mathbf{E}(X_j - X_{j-1} | \mathcal{G}_{j-1})). \end{aligned}$$

Comme  $X_j$  est une martingale, on a  $\mathbf{E}(X_j - X_{j-1} | \mathcal{G}_{j-1}) = 0$ . On en déduit que, si  $i < j$  :

$$\mathbf{E}(\phi_i \phi_j (X_i - X_{i-1})(X_j - X_{j-1})) = 0.$$

Si  $j > i$  on obtient le même résultat. Enfi n si  $i = j$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\phi_i^2 (X_i - X_{i-1})^2) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(\phi_i^2 (X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{G}_{i-1})) \\ &= \mathbf{E}(\phi_i^2 \mathbf{E}((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{G}_{i-1})), \end{aligned}$$

et fi nalement :

$$\mathbf{E}((X_i - X_{i-1})^2 | \mathcal{G}_{i-1}) = \mathbf{E}((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) = t_i - t_{i-1}.$$

En regroupant ces résultats on obtient :

$$\mathbf{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n \phi_i (X_i - X_{i-1})\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2 (t_i - t_{i-1})\right).$$

La continuité de  $t \rightarrow \int_0^t H_s dW_s$  est claire sur sa définition. Le troisième point est une conséquence de l'inégalité de Doob (3.7) appliquée à la martingale continue  $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{t \geq 0}$ . ■

**Remarque 4.3** On pose par définition :

$$\int_t^T H_s dW_s = \int_0^T H_s dW_s - \int_0^t H_s dW_s$$

Si  $t \leq T$ , et si  $A \in \mathcal{F}_t$ , alors  $s \rightarrow \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{t < s\}} H_s$  reste un processus élémentaire et il est facile de vérifier, sur la définition de l'intégrale, que :

$$\int_0^T \mathbf{1}_A H_s \mathbf{1}_{\{t < s\}} dW_s = \mathbf{1}_A \int_t^T H_s dW_s. \quad (3.1)$$

On vient de définir et donner des propriétés de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, nous allons maintenant étendre cette intégrale à une classe de processus adaptés :

$$\mathcal{H} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processus adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty \right\}.$$

**Proposition 4.4** Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -brownien. Alors il existe une unique application linéaire  $J$  de  $\mathcal{H}$  dans l'espace des  $\mathcal{F}_t$ -martingales continues définies sur  $[0, T]$ , telle que :

1. Si  $(H_t)_{t \leq T}$  est un processus élémentaire, **P** p.s. pour tout  $0 \leq t \leq T$   $J(H)_t = I(H)_t$ .
2. Si  $t \leq T$ ,  $\mathbf{E}(J(H)_t^2) = \mathbf{E}\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$ .

Cette application linéaire est unique au sens suivant, si  $J$  et  $J'$  sont deux prolongements linéaires vérifiant les propriétés précédentes alors :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \quad \forall 0 \leq t \leq T, J(H)_t = J'(H)_t$$

On note, si  $H \in \mathcal{H}$ ,  $\int_0^t H_s dW_s = J(H)_t$ .

De plus cette intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes :

**Proposition 4.5** Si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus de  $\mathcal{H}$  alors :

1. On a :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2 \right) \leq 4\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right) \quad (3.2)$$

2. Si  $\tau$  est un  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \int_0^\tau H_s dW_s = \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s \quad (3.3)$$

**Démonstration :** Nous admettrons que si  $(H_s)_{s \leq T}$  est dans  $\mathcal{H}$ , il existe une suite  $(H_s^n)_{s \leq T}$  de processus élémentaires tels que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left( \int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds \right) = 0.$$

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [KS88] (page 134 problème 2.5).

Si  $H \in \mathcal{H}$  et  $(H^n)_{n \geq 0}$  est une suite de processus élémentaires convergeant vers  $H$ , au sens précédent, on a :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} |I(H^{n+p})_t - I(H^n)_t|^2 \right) \leq 4\mathbf{E} \left( \int_0^T |H_s^{n+p} - H_s^n|^2 ds \right). \quad (3.4)$$

Il existe donc une sous suite  $H^{\phi(n)}$  telle que :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} |I(H^{\phi(n+1)})_t - I(H^{\phi(n)})_t|^2 \right) \leq \frac{1}{2^n}$$

La série de fonctions de terme général  $I(H^{\phi(n+1)}) - I(H^{\phi(n)})$  est donc, presque sûrement, uniformément convergente, d'où  $I(H^{\phi(n)})_t$  converge vers une fonction continue qui sera par définition  $t \mapsto J(H)_t$ . En passant à la limite dans (3.4), on obtient :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} |J(H)_t - I(H^n)_t|^2 \right) \leq 4\mathbf{E} \left( \int_0^T |H_s - H_s^n|^2 ds \right). \quad (3.5)$$

Ceci entraîne que  $(J(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$  ne dépend pas de la suite approximante.  $(J(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale, en effet :

$$\mathbf{E}(I(H^n)_t | \mathcal{F}_s) = I(H^n)_s.$$

De plus pour tout  $t \lim_{n \rightarrow +\infty} I(H^n)_t = J(H)_t$  en norme  $L^2(\Omega, \mathbf{P})$  et la continuité dans  $L^2(\Omega, \mathbf{P})$  de l'espérance conditionnelle permet de conclure.

De (3.5) et de  $\mathbf{E}(I(H^n)_t^2) = \mathbf{E} \left( \int_0^T |H_s^n|^2 ds \right)$  on déduit que  $\mathbf{E}(J(H)_t^2) = \mathbf{E} \left( \int_0^T |H_s|^2 ds \right)$ . De même de (3.5) et de  $\mathbf{E}(\sup_{t \leq T} I(H^n)_t^2) \leq 4\mathbf{E} \left( \int_0^T |H_s^n|^2 ds \right)$ , on déduit (3.2).

L'unicité du prolongement résulte de la densité des processus élémentaires dans  $\mathcal{H}$ .

Nous allons maintenant démontrer (3.3). On remarque d'abord que (3.1) reste valable si  $H \in \mathcal{H}$ . Il suffit pour cela d'utiliser la densité des processus élémentaires dans  $\mathcal{H}$  et (3.5).

On va ensuite démontrer le résultat pour des temps d'arrêt de la forme  $\tau = \sum_{1 \leq i \leq n} t_i \mathbf{1}_{A_i}$ , où  $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , les  $A_i$  étant disjoints et  $\mathcal{F}_{t_i}$  mesurables. On a dans ce cas :

$$\int_0^\tau \mathbf{1}_{\{s > \tau\}} H_s dW_s = \int_0^T \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{1}_{\{s > t_i\}} \right) H_s dW_s,$$

mais chaque  $\mathbf{1}_{\{s > t_i\}} \mathbf{1}_{A_i} H_s$  est adapté (Ce processus est nul si  $s \leq t_i$  et vaut  $\mathbf{1}_{A_i} H_s$  sinon) et donc dans  $\mathcal{H}$ . On en déduit que :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \mathbf{1}_{\{s > \tau\}} H_s dW_s &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_0^T \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{1}_{\{s > t_i\}} H_s dW_s \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{1}_{A_i} \int_{t_i}^T H_s dW_s = \int_\tau^T H_s dW_s, \end{aligned}$$

puis que  $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s = \int_0^\tau H_s dW_s$ .

Pour généraliser ce résultat, remarquons qu'un temps d'arrêt quelconque  $\tau$  peut être approximé par une suite décroissante de temps d'arrêt du type précédent en posant :

$$\tau_n = \sum_{0 \leq i \leq 2^n} \frac{(k+1)T}{2^n} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{kT}{2^n} \leq \tau < \frac{(k+1)T}{2^n} \right\}}.$$

$\tau_n$  converge presque sûrement vers  $\tau$  en décroissant. On en déduit que presque sûrement  $\int_0^{\tau_n} H_s dW_s$  tend vers  $\int_0^\tau H_s dW_s$  par continuité de  $t \mapsto \int_0^t H_s dW_s$ . D'autre part :

$$\mathbf{E} \left( \left| \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s - \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s \right|^2 \right) = \mathbf{E} \left( \int_0^T \mathbf{1}_{\{\tau < s \leq \tau_n\}} H_s^2 ds \right)$$

Ce dernier terme tend vers 0 par convergence dominée, donc  $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s$  tend dans  $L^2(\Omega, \mathbf{P})$  (et presque sûrement pour une sous suite) vers  $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s$ . Ceci permet d'obtenir l'égalité (3.3) pour tout temps d'arrêt. ■

Nous aurons besoin d'un résultat permettant de relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur  $(H_s)$ . Posons :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left\{ (H_s)_{0 \leq s \leq T} \text{ est un processus adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \int_0^T H_s^2 ds < +\infty \text{ P p.s.} \right\}.$$

La proposition suivante permet de prolonger l'intégrale stochastique de  $\mathcal{H}$  à  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

**Proposition 4.6** *Il existe une unique application linéaire  $\tilde{J}$  de l'espace  $\tilde{\mathcal{H}}$  dans l'espace vectoriel des processus continus définis sur  $[0, T]$ , telle que :*

1. Propriété de prolongement. Si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus élémentaire alors :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } , \forall 0 \leq t \leq T, \tilde{J}(H)_t = I(H)_t.$$

2. Propriété de continuité : Si  $(H^n)_{n \geq 0}$  est une suite de processus de  $\tilde{\mathcal{H}}$  telle que  $\int_0^T H_s^{n2} ds$  tend vers 0 en probabilité alors  $\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H^n)_t|$  tend vers 0 en probabilité.

On note toujours  $\int_0^t H_s dW_s$  pour  $\tilde{J}(H)_t$ .

**Remarque 4.7** Il est important de noter que dans ce cas  $\left( \int_0^t H_s dW_s \right)_{0 \leq t \leq T}$  n'est pas (nécessairement) une martingale.

**Démonstration :** Il est facile de déduire de la propriété de prolongement et de la propriété de continuité que, si  $H \in \mathcal{H}$  alors  $\mathbf{P} \text{ p.s. } , \forall t \leq T, \tilde{J}(H)_t = J(H)_t$ .

Soit  $H \in \tilde{\mathcal{H}}$ , posons  $T_n = \inf \{ 0 \leq s \leq T, \int_0^s H_u^2 du \geq n \}$  ( $+\infty$  si cet ensemble est vide), et  $H_s^n = H_s \mathbf{1}_{\{s \leq T_n\}}$ .

Montrons, tout d'abord, que  $T_n$  est un temps d'arrêt. Comme  $\{T_n \leq t\} = \{\int_0^t H_u^2 du \geq n\}$ , il nous suffit de prouver que  $\int_0^t H_u^2 du$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Mais ce résultat est vrai si  $H$  est un processus élémentaire, et donc par densité si  $H \in \mathcal{H}$ . Enfi n si  $H \in \tilde{\mathcal{H}}$ ,  $\int_0^t H_u^2 du$  qui est la limite presque sûre, lorsque  $K$  tend vers  $+\infty$ , de  $\int_0^t H_u^2 \wedge K du$  est aussi  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Il est alors facile de voir que les processus  $H_s^n$  sont adaptés et bornés donc dans  $\mathcal{H}$ . De plus :

$$\int_0^t H_s^n dW_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq T_n\}} H_s^{n+1} dW_s.$$



L'égalité (3.3) prouve alors que :

$$\int_0^t H_s^n dW_s = \int_0^{t \wedge T_n} H_s^{n+1} dW_s.$$

Donc sur l'ensemble  $\{\int_0^T H_u^2 du < n\}$ , pour tout  $t \leq T$ ,  $J(H^n)_t = J(H^{n+1})_t$ . Comme  $\cup_{n \geq 0} \{\int_0^T H_u^2 du < n\} = \{\int_0^T H_u^2 du < +\infty\}$ , on peut définir presque sûrement un processus  $\tilde{J}(H)_t$  en posant sur  $\{\int_0^T H_u^2 du < n\}$  :

$$\forall t \leq T \quad \tilde{J}(H)_t = J(H^n)_t.$$

Le processus  $t \mapsto \tilde{J}(H)_t$  est presque sûrement continu, par définition. La propriété de prolongement est vérifiée par construction. Il reste donc à prouver la propriété de continuité de  $\tilde{J}$ . Pour cela remarquons que :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t| \geq \epsilon \right) &\leq \mathbf{P} \left( \int_0^T H_s^2 ds \geq \frac{1}{N} \right) \\ &+ \mathbf{P} \left( \mathbf{1}_{\left\{ \int_0^T H_u^2 du < \frac{1}{N} \right\}} \sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t| \geq \epsilon \right). \end{aligned}$$

Si l'on note  $\tau_N = \inf \{s \leq T, \int_0^s H_u^2 du \geq \frac{1}{N}\}$  ( $+\infty$  si cet ensemble est vide), alors sur  $\{\int_0^T H_u^2 du < \frac{1}{N}\}$ , l'égalité (3.3) prouve que, pour tout  $t \leq T$  :

$$\int_0^t H_s dW_s = \tilde{J}(H)_t = J(H^1)_t = \int_0^t H_s^1 \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}} dW_s = \int_0^t H_s \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}} dW_s.$$

D'où, en utilisant (3.2) pour le processus  $s \mapsto H_s \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H)_t| \geq \epsilon \right) &\leq \mathbf{P} \left( \int_0^T H_s^2 ds \geq \frac{1}{N} \right) \\ &+ \frac{4}{\epsilon^2} \mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_N\}} ds \right) \\ &\leq \mathbf{P} \left( \int_0^T H_s^2 ds \geq \frac{1}{N} \right) + \frac{4}{N\epsilon^2} \end{aligned}$$

On en déduit que si  $\int_0^T H_s^2 ds$  tend vers 0 en probabilité, alors  $\sup_{t \leq T} |\tilde{J}(H^n)_t|$  tend vers 0 en probabilité.

Pour prouver la linéarité de  $\tilde{J}$ , considérons deux processus de  $\tilde{\mathcal{H}}$ ,  $H$  et  $K$  et les deux suites  $H_t^n$  et  $K_t^n$  définies comme au début de la démonstration, telle que  $\int_0^T (H_s^n - H_s)^2 ds$  et  $\int_0^T (K_s^n - K_s)^2 ds$  tendent en probabilité vers 0. On peut alors passer à la limite dans l'égalité  $J(\lambda H^n + \mu K^n)_t = \lambda J(H^n)_t + \mu J(K^n)_t$ , grâce à la propriété de continuité de  $\tilde{J}$ . On obtient ainsi la linéarité de  $\tilde{J}$ .

Enfin, le fait que si  $H \in \tilde{\mathcal{H}}$  alors  $\int_0^T (H_t - H_t^n)^2 dt$  tend vers 0 en probabilité et la propriété de continuité prouvent l'unicité du prolongement. ■

Nous allons résumer les conditions d'existence de l'intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien, et les hypothèses qui permettent d'affirmer qu'il s'agit d'une martingale.

### Résumé :

Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien et  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté. On peut définir l'intégrale stochastique  $(\int_0^t H_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$  dès que  $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$   $\mathbf{P}$  p.s. . Le processus  $(\int_0^t H_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale si  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty$ . Cette condition n'est cependant pas nécessaire. Remarquons, toutefois, que la condition  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty$  est équivalente à :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} \left( \int_0^t H_s dW_s \right)^2 \right) < +\infty,$$

et que , dans ce cas on a l'égalité :

$$\mathbf{E} \left[ \left( \int_0^T H_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right). \quad (3.6)$$

Ces propriétés sont démontrées dans l'exercice 15.

## 4.2 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô".

La formule d'Itô donne, en particulier, la façon de différencier  $t \mapsto f(W_t)$  si  $f$  est une fonction deux fois continûment différentiable. L'exemple suivant prouve que le prolongement naïf du calcul différentiel usuel est voué à l'échec. Supposons que l'on veuille "différencier"  $t \rightarrow W_t^2$  et l'exprimer en fonction de " $dW_t$ ". Pour une fonction  $f(t)$  différentiable nulle en 0, on a  $f(t)^2 = 2 \int_0^t f(s) \dot{f}(s) ds = 2 \int_0^t f(s) df(s)$ . Dans les cas du mouvement brownien et de l'intégrale stochastique on ne peut avoir une formule du même type :  $W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s$ . En effet, d'après ce qui précède,  $\int_0^t W_s dW_s$  est une martingale (car  $\mathbf{E} \left( \int_0^t W_s^2 ds \right) < +\infty$ ), nulle en zéro. Si elle était égale à  $W_t^2$  elle serait positive, et une martingale nulle en 0 ne peut être positive que si elle est nulle.

Commençons par préciser la définition de la classe de processus pour laquelle on peut énoncer la formule d'Itô.

**Définition 4.8** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé muni d'une filtration et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  tel que :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

avec :

- $X_0$   $\mathcal{F}_0$ -mesurable.
- $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  des processus adaptés à  $\mathcal{F}_t$ .
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$   $\mathbf{P}$  p.s.
- $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$   $\mathbf{P}$  p.s.

On peut démontrer (voir exercice 16) le résultat suivant, qui précise l'unicité de la décomposition précédente.

**Proposition 4.9** Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale continue telle que :

$$M_t = \int_0^t K_s ds, \text{ avec } \mathbf{P} \text{ p.s. } , \int_0^T |K_s| ds < +\infty,$$

alors :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \forall t \leq T, M_t = 0.$$

Ceci entraîne que :

– La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$$

alors :

$$X_0 = X'_0 \quad d\mathbf{P} \text{ p.s.} \quad H_s = H'_s \quad ds \times d\mathbf{P} \text{ p.p.} \quad K_s = K'_s \quad ds \times d\mathbf{P} \text{ p.p.}$$

– Si  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale de la forme  $X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$ , alors  $K_t = 0$   $dt \times d\mathbf{P}$  p.p..

La formule d'Itô prend la forme suivante (nous l'admettons sans démonstration et nous renvoyons à [Bou88] pour une démonstration élémentaire dans le cas du brownien ou à [KS88] pour une démonstration complète) :

**Théorème 4.10** Soit  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

et  $f$  une fonction deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d \langle X, X \rangle_s$$

où, par définition :

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

et :

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s.$$

De même si  $(t, x) \rightarrow f(t, x)$  est une fonction deux fois différentiable en  $x$  et une fois différentiable en  $t$ , ces dérivées étant continues en  $(t, x)$  (on dit dans ce cas que  $f$  est de classe  $C^{1,2}$ ), on a :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds \\ &\quad + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d \langle X, X \rangle_s. \end{aligned}$$

### 4.3 Exemples d'utilisation de la formule d'Itô

Commençons par traiter un exemple élémentaire. Si  $f(x) = x^2$  et  $X_t = W_t$ , on a  $K_s = 0$  et  $H_s = 1$ , donc :

$$W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds.$$

On obtient :

$$W_t^2 - t = 2 \int_0^t W_s dW_s.$$

Comme  $\mathbf{E} \left( \int_0^t W_s^2 ds \right) < +\infty$ , on retrouve le fait que  $W_t^2 - t$  est une martingale.

Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions  $(S_t)_{t \geq 0}$  de :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s (\mu ds + \sigma dW_s). \quad (3.7)$$

On écrit souvent ce type d'équation sous la forme :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x_0. \quad (3.8)$$

Cela signifie que l'on cherche un processus adapté  $(S_t)_{t \geq 0}$  tel que les intégrales  $\int_0^t S_s ds$  et  $\int_0^t S_s dW_s$  aient un sens, et qui vérifie, pour chaque  $t$  :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s.$$

Faisons tout d'abord un calcul formel, posons  $Y_t = \log(S_t)$  où  $S_t$  est une solution de l'équation précédente.  $S_t$  est un processus d'Itô avec  $K_s = \mu S_s$  et  $H_s = \sigma S_s$ . Appliquons la formule d'Itô à  $f(x) = \log(x)$  (au moins formellement car  $f(x)$  n'est pas de classe  $C^2$ !). On obtient en supposant que  $S_t$  est positif :

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{S_s^2} \sigma^2 S_s^2 ds,$$

soit, en utilisant (3.8) :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \sigma^2/2) dt + \int_0^t \sigma dW_t.$$

On en déduit que :

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \sigma^2/2) t + \sigma W_t.$$

Il semble donc que :

$$S_t = x_0 \exp\left((\mu - \sigma^2/2) t + \sigma W_t\right)$$

soit une solution de l'équation (3.7). Vérifions rigoureusement cela.  $S_t = f(t, W_t)$  où :

$$f(t, x) = x_0 \exp\left((\mu - \sigma^2/2) t + \sigma x\right).$$

La formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} S_t &= f(t, W_t) \\ &= f(0, W_0) + \int_0^t f'_s(s, W_s) ds \\ &\quad + \int_0^t f'_x(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, W_s) d\langle W, W \rangle_s. \end{aligned}$$

Mais, comme  $\langle W, W \rangle_t = t$  :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s (\mu - \sigma^2/2) ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_s \sigma^2 ds,$$

et finalement :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s.$$

**Remarque 4.11** On aurait pu obtenir (exercice) le résultat précédent en appliquant la formule d'Itô à  $S_t = \phi(Z_t)$ , avec  $Z_t = (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t$  (qui est un processus d'Itô) et  $\phi(x) = x_0 \exp(x)$ .

On vient donc de démontrer l'existence d'une solution de (3.7). Nous allons maintenant prouver que cette solution est unique. Pour cela, nous allons utiliser une propriété généralisant la "formule d'intégration par parties" dans le cas des processus d'Itô.

**Proposition 4.12 (Formule d'intégration par parties.)** Soient  $X_t$  et  $Y_t$  deux processus d'Itô,  $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$  et  $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$ . Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

avec la convention que :

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

**Démonstration :** On a, d'après la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} (X_t + Y_t)^2 &= (X_0 + Y_0)^2 \\ &\quad + 2 \int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) \\ &\quad + \int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds \\ X_t^2 &= X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds \\ Y_t^2 &= Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H'_s{}^2 ds. \end{aligned}$$

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds.$$

■

Montrons, maintenant, l'unicité d'une solution de l'équation (3.7). Notons que :

$$S_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right)t + \sigma W_t\right)$$

est une solution de (3.7) et supposons que  $(X_t)_{t \geq 0}$  en soit une autre. On va chercher à exprimer la "différentielle stochastique" de  $X_t S_t^{-1}$ . Posons :

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = \exp\left(\left(-\mu + \sigma^2/2\right)t - \sigma W_t\right),$$

$\mu' = -\mu + \sigma^2/2$  et  $\sigma' = -\sigma$ . Alors  $Z_t = \exp\left(\left(\mu' - \sigma'^2/2\right)t + \sigma' W_t\right)$  et le calcul fait précédemment prouve que :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s (\mu' ds + \sigma' dW_s) = 1 + \int_0^t Z_s \left( (-\mu + \sigma^2/2) ds - \sigma dW_s \right).$$

On peut alors exprimer la "différentielle" de  $X_t Z_t$  grâce à la formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô :

$$d(X_t Z_t) = X_t dZ_t + Z_t dX_t + d\langle X, Z \rangle_t.$$

Ici, on a :

$$\langle X, Z \rangle_t = \left\langle \int_0^t X_s \sigma dW_s, - \int_0^t Z_s \sigma dW_s \right\rangle_t = - \int_0^t \sigma^2 X_s Z_s ds.$$

On en déduit que :

$$d(X_t Z_t) = X_t Z_t \left( (-\mu + \sigma^2) dt - \sigma dW_t \right) + X_t Z_t (\mu dt + \sigma dW_t) - X_t Z_t \sigma^2 dt = 0$$

$X_t Z_t$  est donc égal à  $X_0 Z_0$ , ce qui entraîne que :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P} \text{ p.s. } X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t.$$

Les processus  $X_t$  et  $Z_t$  étant continus, ceci prouve que :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \forall t \geq 0, \quad X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t.$$

On vient ainsi de démontrer la proposition suivante :

**Théorème 4.13**  $\sigma, \mu$  étant deux nombres réels,  $(W_t)_{t \geq 0}$  étant un mouvement brownien et  $T$  un réel strictement positif, il existe un processus de Itô unique  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  qui vérifie, pour tout  $t \leq T$  :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s (\mu ds + \sigma dW_s).$$

Ce processus est donné par :

$$S_t = x_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right).$$

**Remarque 4.14** – Le processus  $S_t$  que l'on vient d'expliciter servira de modèle standard pour le prix d'un actif financier. On l'appelle modèle de Black et Scholes.  
– Lorsque  $\mu = 0$ ,  $S_t$  est une martingale (voir proposition 3.3), ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle.

**Remarque 4.15** Soit  $\Theta$  un ouvert de  $\mathbf{R}$  et  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus d'Itô qui vérifie, pour tout  $t \leq T$ ,  $X_t \in \Theta$ . Si, de plus,  $f$  est une fonction deux fois continûment différentiable de l'ouvert  $\Theta$  dans  $\mathbf{R}$ , on peut justifier rigoureusement l'extension de la formule d'Itô dans ce cas :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds.$$

Ce résultat permet en particulier de justifier l'application de la formule d'Itô, pour un processus strictement positif et pour la fonction log.

#### 4.4 Formule d'Itô multidimensionnelle

La formule d'Itô se généralise aux cas où la fonction  $f$  dépend de plusieurs processus d'Itô et lorsque ces processus d'Itô s'expriment en fonction de plusieurs mouvements browniens. Cette généralisation se révèle utile, par exemple, pour les modèles de taux d'intérêt sophistiqués.

**Définition 4.16** On appelle  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien  $p$ -dimensionnel un processus à valeurs dans  $\mathbf{R}^p$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  adapté à  $\mathcal{F}_t$ , avec  $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^p)$ , où les  $(W_t^i)_{t \geq 0}$  sont des  $\mathcal{F}_t$ -mouvements browniens standards indépendants.

On généralise dans ce cadre la notion de processus d'Itô.

**Définition 4.17** On dit que  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus d'Itô si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t H_s^i dW_s^i$$

où :

- $K_t$  et les  $(H_t^i)$  sont adaptés à  $(\mathcal{F}_t)$ .
- $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$  **P** p.s. .
- $\int_0^T (H_s^i)^2 ds < +\infty$  **P** p.s. .

La formule d'Itô prend alors la forme suivante :

**Proposition 4.18** Soient  $(X_t^1, \dots, X_t^n)$   $n$  processus d'Itô :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t H_s^{i,j} dW_s^j$$

alors si  $f$  est une fonction deux fois différentiable en  $x$  et une fois différentiable en  $t$ , ces dérivées étant continues en  $(t, x)$  :

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \dots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \dots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) d \langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

où :

- $dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^p H_s^{i,j} dW_s^j$ ,
- $d \langle X^i, X^j \rangle_s = \sum_{m=1}^p H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds$ .

**Remarque 4.19** Si  $(X_s)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(Y_s)_{0 \leq t \leq T}$  sont deux processus d'Itô, on peut définir formellement le "crochet" de  $X$  et  $Y$  (que l'on a noté  $\langle X, Y \rangle_s$ ) par les règles suivantes :

- $\langle X, Y \rangle_t$  est bilinéaire et symétrique.
- $\langle \int_0^\cdot K_s ds, X \rangle_t = 0$  si  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus d'Itô.
- $\langle \int_0^\cdot H_s dW_t^i, \int_0^\cdot H'_s dW_t^j \rangle_t = 0$  si  $i \neq j$
- $\langle \int_0^\cdot H_s dW_t^i, \int_0^\cdot H'_s dW_t^i \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds$

Cette définition permet de retrouver la formule du crochet donnée dans la proposition précédente.

## 5 Equations différentielles stochastiques

Nous avons étudié en détail, au paragraphe 4.2 les solutions de l'équation :

$$X_t = x + \int_0^t X_s (\mu ds + \sigma dW_s).$$

On peut considérer des équations d'une forme plus générales :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s. \quad (3.9)$$

On appelle ces équations des “équations différentielles stochastiques”. Une solution de (3.9) porte le nom de “diffusion”. Ces équations permettent de construire la plupart des modèles d’actifs utiles en finances, aussi bien lorsque l’on cherche à modéliser des actifs que des taux d’intérêt. Nous allons étudier quelques propriétés des solutions de ces équations.

## 5.1 Théorème d’Itô

Précisons, tout d’abord, ce que l’on entend par une solution de (3.9).

**Définition 5.1** *On se place sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  muni d’une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . On se donne,  $\mathbf{b} : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\sigma : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $Z$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable et  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. Trouver une solution à l’équation (3.9) signifie trouver un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  continu  $\mathcal{F}_t$ -adapté, qui vérifie :*

– Pour tout  $t \geq 0$ , les intégrales  $\int_0^t \mathbf{b}(s, X_s) ds$  et  $\int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$  ont un sens :

$$\int_0^t |\mathbf{b}(s, X_s)| ds < +\infty \text{ et } \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < +\infty \quad \mathbf{P} \text{ p.s. } .$$

–  $(X_t)_{t \geq 0}$  vérifie (3.9) c’est-à-dire :

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbf{P} \text{ p.s. } \quad X_t = Z + \int_0^t \mathbf{b}(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

**Remarque 5.2** On note formellement (3.9) sous la forme :

$$\begin{cases} dX_t &= \mathbf{b}(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \\ X_0 &= Z \end{cases}$$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur  $\mathbf{b}$  et  $\sigma$  pour avoir un résultat d’existence et d’unicité pour (3.9).

**Théorème 5.3** *Si  $\mathbf{b}$  et  $\sigma$  sont des fonctions continues, telles qu’il existe  $K < +\infty$ , avec :*

1.  $|\mathbf{b}(t, x) - \mathbf{b}(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
2.  $|\mathbf{b}(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$
3.  $\mathbf{E}(Z^2) < +\infty$

alors, pour tout  $T \geq 0$ , (3.9) admet une solution unique dans l’intervalle  $[0, T]$ . De plus cette solution  $(X_s)_{0 \leq s \leq T}$  vérifie :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2 \right) < +\infty$$

L’unicité signifie que si  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  sont deux solutions de (3.9), alors :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \quad \forall 0 \leq t \leq T, \quad X_t = Y_t.$$

**Démonstration :** Posons :

$$\mathcal{E} = \left\{ (X_s)_{0 \leq s \leq T}, \text{ processus continu et } \mathcal{F}_t\text{-adapté, tel que } \mathbf{E} \left( \sup_{s \leq T} |X_s|^2 \right) < +\infty \right\}$$



$\mathcal{E}$  muni de la norme  $\|X\| = \sqrt{\mathbf{E}(\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2)}$  est un espace vectoriel normé complet. Pour démontrer l'existence nous allons utiliser un argument d'existence d'un point fixe pour une application contractante. Soit  $\Phi$  l'application qui à un processus  $(X_s)_{0 \leq s \leq T}$  associe un processus  $(\Phi(X)_s)_{0 \leq s \leq T}$  défini par :

$$\Phi(X)_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

Si  $X$  est dans  $\mathcal{E}$ ,  $\Phi(X)$  est bien définie, de plus si  $X$  et  $Y$  sont deux éléments de  $\mathcal{E}$  en utilisant le fait que,  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  on obtient :

$$\begin{aligned} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2 &\leq 2 \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s)) ds \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right|^2 \right) \end{aligned}$$

donc en utilisant l'inégalité (3.2) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\sup_{s \leq T} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2) &\leq 2\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^t |b(s, X_s) - b(s, Y_s)| ds \right)^2 \right) \\ &\quad + 8\mathbf{E} \left( \int_0^T (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))^2 ds \right) \\ &\leq 2(K^2T^2 + 4K^2T)\mathbf{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t|^2) \end{aligned}$$

D'où  $\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \sqrt{2(K^2T^2 + 4K^2T)}\|X - Y\|$ . De plus, on a (on note 0 pour le processus identiquement nul) :

$$|\Phi(0)_t|^2 \leq 3 \left( Z^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t b(s, 0) ds \right|^2 + \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, 0) dW_s \right|^2 \right)$$

en remarquant que  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ . Et donc :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi(0)_t|^2 \right) \leq 3(\mathbf{E}(Z^2) + K^2T^2 + 4K^2T) < +\infty.$$

On en déduit que  $\Phi$  est une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  de norme de Lipschitz majorée par  $k(T) = \sqrt{2(K^2T^2 + 4K^2T)}$ . Nous commençons par supposer que  $T$  est suffisamment petit pour que  $k(T) < 1$ .  $\Phi$  est alors une application contractante de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ . Elle admet donc un point fixe unique dans  $\mathcal{E}$ . De plus, si  $X$  est un point fixe de  $\Phi$ , c'est une solution de (3.9). Ceci prouve l'existence. D'autre part, une solution de (3.9) qui est dans  $\mathcal{E}$  est un point fixe de  $\Phi$ . Ceci prouve l'unicité d'une solution de (3.9) dans  $\mathcal{E}$ . Pour démontrer l'unicité dans la classe de tous les processus de Itô, il suffit de prouver qu'une solution de (3.9) est forcément dans  $\mathcal{E}$ . Soit  $X$  une solution de (3.9), nous noterons  $T_n = \inf\{s \geq 0, |X_s| > n\}$  et  $f^n(t) = \mathbf{E}(\sup_{0 \leq s \leq t \wedge T_n} |X_s|^2)$ . Il est facile de vérifier que  $f^n(t)$  est une fonction finie et continue. En faisant le même genre d'estimation que précédemment on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\sup_{0 \leq u \leq t \wedge T_n} |X_u|^2) &\leq 3 \left( \mathbf{E}(Z^2) + \mathbf{E} \left( \int_0^{t \wedge T_n} K(1 + |X_s|) ds \right)^2 + 4\mathbf{E} \left( \int_0^{t \wedge T_n} K^2(1 + |X_s|)^2 ds \right) \right) \\ &\leq 3 \left( \mathbf{E}(Z^2) + 2(K^2T + 4K^2) \int_0^t (1 + \mathbf{E}(\sup_{0 \leq u \leq s \wedge T_n} |X_u|^2)) ds \right). \end{aligned}$$

Cela donne l'estimation suivante :

$$f^n(t) \leq a + b \int_0^t f^n(s) ds.$$

Nous allons maintenant utiliser une version du lemme de Gronwall.

**Lemme 5.4 (Lemme de Gronwall)** *Si  $f$  est une fonction continue, telle que pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,  $f(t) \leq a + b \int_0^t f(s) ds$ , alors  $f(T) \leq a(1 + e^{bT})$ .*

**Démonstration :** Posons  $u(t) = e^{-bt} \int_0^t f(s) ds$ . On a  $u'(t) = e^{-bt}(f(t) - b \int_0^t f(s) ds) \leq a e^{-bt}$ . Par intégration, on obtient  $u(T) \leq a/b$  et  $f(T) \leq a(1 + e^{bT})$ . ■

On en déduit ici que  $f^n(T) < K < +\infty$ ,  $K$  étant une constante fonction de  $T$  mais indépendante de  $n$ . Le lemme de Fatou donne alors, en passant à la limite en  $n$ , que pour tout  $T$  :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2 \right) < K < +\infty.$$

$X$  est donc dans  $\mathcal{E}$ . Ceci termine la démonstration dans le cas où  $T$  est petit.

Pour conclure pour  $T$  quelconque, il suffit de prendre  $n$  assez grand et de raisonner successivement sur les intervalles  $[0, T/n], [T/n, 2T/n], \dots, [(n-1)T/n, T]$ . ■

## 5.2 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la solution unique de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

On peut expliciter cette solution. En effet, posons  $Y_t = X_t e^{ct}$  et écrivons la formule d'intégration par parties :

$$dY_t = dX_t e^{ct} + X_t d(e^{ct}) + d\langle X, e^{c\cdot} \rangle_t.$$

Mais  $\langle X, e^{c\cdot} \rangle_t = 0$  car  $d(e^{ct}) = ce^{ct} dt$ . On en déduit que  $dY_t = \sigma e^{ct} dW_t$  puis que :

$$X_t = x e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dW_s.$$

On peut calculer la moyenne et la variance de  $X_t$  :

$$\mathbf{E}(X_t) = x e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \mathbf{E} \left( \int_0^t e^{cs} dW_s \right) = x e^{-ct}$$

(en effet  $\mathbf{E} \left( \int_0^t (e^{cs})^2 ds \right) < +\infty$ , et donc  $\int_0^t e^{cs} dW_s$  est une martingale nulle à l'instant 0 donc de moyenne nulle). De même :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \mathbf{E} \left( (X_t - \mathbf{E}(X_t))^2 \right) \\ &= \sigma^2 \mathbf{E} \left( e^{-2ct} \left( \int_0^t e^{cs} dW_s \right)^2 \right) \\ &= \sigma^2 e^{-2ct} \mathbf{E} \left( \int_0^t e^{2cs} ds \right) \\ &= \sigma^2 \frac{1 - e^{-2ct}}{2c} \end{aligned}$$

On peut démontrer que  $X_t$  est une variable aléatoire gaussienne, en effet  $X_t$  s'écrit  $\int_0^t f(s) dW_s$  où  $f(\cdot)$  est une fonction déterministe du temps et  $\int_0^t f^2(s) ds < +\infty$  (voir exercice 12). Plus précisément, le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus gaussien. Cela signifie que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des réels et si  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ , la variable aléatoire  $\lambda_1 X_{t_1} + \dots + \lambda_n X_{t_n}$  est une variable aléatoire gaussienne. Pour se convaincre de ceci, il suffit de remarquer que :

$$X_{t_i} = x e^{-ct_i} + \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{s \leq t_i\}} e^{cs} dW_s = m_i + \int_0^{t_i} f_i(s) dW_s.$$

Alors  $\lambda_1 X_{t_1} + \dots + \lambda_n X_{t_n} = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i + \int_0^t \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(s) \right) dW_s$  est bien une variable aléatoire gaussienne (car c'est, comme précédemment, une intégrale stochastique d'une fonction déterministe du temps).

### 5.3 Equations différentielles stochastiques à valeurs vectorielles

On peut généraliser l'étude des équations différentielles stochastiques aux cas où le processus évolue dans  $\mathbf{R}^n$ . Cette généralisation est utile, dans les applications à la finance, lorsque l'on cherche à construire des modèles pour des paniers d'actions ou de devises. On se donne :

- $W = (W^1, \dots, W^p)$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien  $p$ -dimensionnel.
- $b : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $b(s, x) = (b^1(s, x), \dots, b^n(s, x))$ .
- $\sigma : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n \times p}$  (l'ensemble des matrices  $n \times p$ ),

$$\sigma(s, x) = (\sigma_{i,j}(s, x))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}.$$

–  $Z = (Z^1, \dots, Z^n)$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_0$ -mesurable à valeur dans  $\mathbf{R}^n$ .  
et l'on considère l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad (3.10)$$

où il faut comprendre que l'on cherche un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  et tel que  $\mathbf{P}$  p.s. , pour tout  $t$  et pour tout  $i \leq n$ , on a presque sûrement :

$$X_t^i = Z^i + \int_0^t b^i(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s) dW_s^j.$$

Le théorème d'existence et d'unicité se généralise de la façon suivante :

**Théorème 5.5** Si  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $|x|$  est la norme euclidienne de  $x$  et si  $\sigma \in \mathbf{R}^{n \times p}$ ,  $|\sigma|^2 = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \sigma_{i,j}^2$ . On suppose que :

1.  $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
2.  $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$
3.  $\mathbf{E}(|Z|^2) < +\infty$

alors il existe une solution unique à l'équation (3.10). De plus cette solution vérifie, pour tout  $T$  :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2 \right) < +\infty$$

La démonstration est identique à celle du cas à valeurs dans  $\mathbf{R}$ .

### 5.4 Propriété de Markov des solutions d'équations différentielles stochastiques

La propriété de Markov pour un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  signifie que le comportement futur de ce processus après  $t$  dépend uniquement de  $X_t$  et non de ce qui s'est passé avant  $t$ . Ce point est essentiel dans les calculs de prix d'options. Il permet de prouver que le prix d'une option sur un actif markovien ne dépend que du prix de l'actif à l'instant  $t$ .

Mathématiquement, on dira qu'un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  vérifie la propriété de Markov par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  pour laquelle il est adapté, si pour toute fonction  $f$  borélienne bornée et pour tous  $s$  et  $t$ , tels que  $s \leq t$  :

$$\mathbf{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(f(X_t) | X_s).$$

Nous allons énoncer dans ce paragraphe la propriété de Markov pour une solution de (3.9). On notera  $(X_s^{t,x}, s \geq t)$  la solution de l'équation (3.9) partant de  $x$  à l'instant  $t$  et  $X^x = X^{0,x}$  la solution de l'équation partant de  $x$  à l'instant 0.  $X^{t,x}$  vérifie pour  $s \geq t$  :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x}) dW_u.$$

A priori,  $X^{t,x}$  est défini pour tout  $(t, x)$  presque sûrement. On peut cependant, sous les hypothèses du théorème 5.3, construire un processus dépendant de  $(t, x, s)$  qui est  $\mathbf{P}$  p.s. continu en ces trois variables et tel que  $X_s^{t,x}$  soit solution de l'équation précédente. C'est un résultat délicat à démontrer (on trouvera sa démonstration dans [RW87]) que nous allons admettre.

La propriété de Markov est une conséquence d'une propriété "de flot" vérifiée par les solutions d'une équation différentielle stochastique. C'est une généralisation de la propriété de flot des équations différentielles ordinaires.

**Lemme 5.6** *Sous les conditions du théorème 5.3, si  $s \geq t$  :*

$$X_s^{0,x} = X_s^{t,X_t^x} \quad \mathbf{P} \text{ p.s.}$$

**Démonstration :** Nous ne donnons que l'idée générale de cette démonstration. On a, pour tout  $x$  :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u^{t,x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,x}) dW_u.$$

On en déduit, successivement, que  $\mathbf{P}$  p.s. pour tout  $y \in \mathbf{R}$  :

$$X_s^{t,y} = y + \int_t^s b(u, X_u^{t,y}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,y}) dW_u,$$

puis que :

$$X_s^{t,X_t^x} = X_t^x + \int_t^s b(u, X_u^{t,X_t^x}) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^{t,X_t^x}) dW_u.$$

Ces résultats sont intuitifs, mais pour les justifier en détail il faut utiliser la continuité de  $y \mapsto X^{t,y}$ . Nous laissons de côté les détails de leurs démonstrations. Cela admis, on remarque que  $X_s^x$  est aussi solution de l'équation précédente, en effet, si  $t \leq s$  :

$$\begin{aligned} X_s^x &= x + \int_0^s b(u, X_u^x) du + \int_0^s \sigma(u, X_u^x) dW_u \\ &= X_t^x + \int_t^s b(u, X_u^x) du + \int_t^s \sigma(u, X_u^x) dW_u. \end{aligned}$$

L'unicité des solutions de cette équation prouve, alors, que  $X_s^{0,x} = X_s^{t,X_t^x}$  pour  $t \leq s$ . ■

La propriété de Markov prend dans ce cas la forme suivante :

**Théorème 5.7** *Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une solution de (3.9). C'est un processus de Markov par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  du mouvement brownien. Plus précisément, on a, pour toute fonction borélienne bornée  $f$  :*

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \mathbf{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \phi(X_s),$$

où  $\phi(x) = \mathbf{E}(f(X_t^{s,x}))$ .

**Remarque 5.8** On note souvent l'égalité précédente sous la forme :

$$\mathbf{E}(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(f(X_t^{s,x}))|_{x=X_s}.$$

**Démonstration :** Nous ne donnerons qu'une esquisse de la démonstration. Pour une démonstration complète on pourra consulter [Fri75].

La propriété de fbt prouve que, si  $s \geq t$ ,  $X_t^x = X_t^{s, X_s^x}$ . D'autre part, on peut démontrer que  $X_t^{s, x}$  s'exprime de façon mesurable en fonction des accroissements du brownien  $(W_{s+u} - W_s, u \geq 0)$  et de  $x$  (ce résultat est naturel mais délicat à justifier en détail (voir [Fri75])). Si l'on admet ce résultat, pour un  $s$  et un  $t$  fixés on a  $X_t^{s, x} = \Phi(x, W_{s+u} - W_s; u \geq 0)$  et donc :

$$X_t^x = \Phi(X_s^x, W_{s+u} - W_s; u \geq 0),$$

avec  $X_s^x$  qui est  $\mathcal{F}_s$  mesurable et  $(W_{s+u} - W_s)_{u \geq 0}$  qui est indépendant de  $\mathcal{F}_s$ .

Si on applique le résultat de la proposition 2.5 de l'appendice à  $X_s$ ,  $(W_{s+u} - W_s)_{u \geq 0}$ ,  $\Phi$  et  $\mathcal{F}_s$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(\Phi(X_s^x, W_{s+u} - W_s; u \geq 0)) | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(f(\Phi(x, W_{s+u} - W_s; u \geq 0)))|_{x=X_s^x} \\ &= \mathbf{E}(f(X_t^{s, x}))|_{x=X_s^x} \end{aligned}$$

■

Le résultat précédent se généralise à des fonctions des trajectoires de la diffusion après l'instant  $s$ . En particulier, le théorème suivant est utile dans les calculs liés aux taux d'intérêt.

**Théorème 5.9** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une solution de (3.9) et  $r(s, x)$  une fonction mesurable positive. On a, si  $t > s$  :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \mathbf{E} \left( e^{-\int_s^t r(u, X_u) du} f(X_t) | \mathcal{F}_s \right) = \phi(X_s)$$

avec :

$$\phi(x) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_s^t r(u, X_u^{s, x}) du} f(X_t^{s, x}) \right).$$

On écrit aussi cette égalité sous la forme :

$$\mathbf{E} \left( e^{-\int_s^t r(u, X_u) du} f(X_t) | \mathcal{F}_s \right) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_s^t r(u, X_u^{s, x}) du} f(X_t^{s, x}) \right) \Big|_{x=X_s}.$$

**Remarque 5.10** On peut en fait démontrer un résultat plus général que celui énoncé précédemment. Si on omet les détails techniques, on peut affirmer que, si  $\phi$  est "une fonction de toute la trajectoire" de  $X_t$  après  $s$  :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } \mathbf{E}(\phi(X_t^x, t \geq s) | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\phi(X_t^{s, x}, t \geq s)) \Big|_{x=X_s}.$$

**Remarque 5.11** Lorsque  $b$  et  $\sigma$  ne dépendent que de  $x$  (on dit que la diffusion est homogène dans ce cas), on peut montrer que la loi de  $X_{s+t}^{s, x}$  est identique à celle de  $X_t^{0, x}$ , ce qui signifie que si  $f$  est une fonction mesurable et bornée :

$$\mathbf{E}(f(X_{s+t}^{s, x})) = \mathbf{E}(f(X_t^{0, x})).$$

On peut étendre ce résultat et montrer que, si  $r$  est une fonction de  $x$  uniquement :

$$\mathbf{E} \left( e^{-\int_s^{s+t} r(X_u^{s, x}) du} f(X_{s+t}^{s, x}) \right) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^t r(X_u^{0, x}) du} f(X_t^{0, x}) \right).$$

On en déduit que, dans ce cas, le théorème 5.9 s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{E} \left( e^{-\int_s^t r(X_u) du} f(X_t) | \mathcal{F}_s \right) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^{t-s} r(X_u^{0, x}) du} f(X_{t-s}^{0, x}) \right) \Big|_{x=X_s}.$$

## 6 Exercices

**Exercice 6** Soit  $(M_t)_{t \geq 0}$  une martingale, telle que pour tout  $t$ ,  $\mathbf{E}(M_t^2) < +\infty$ . Démontrer que si  $s \leq t$  :

$$\mathbf{E}\left((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s\right).$$

**Exercice 7** Soit  $X_t$  un processus à accroissements indépendants et stationnaires nul en l'instant 0 et tel que, pour tout  $t$ ,  $\mathbf{E}(X_t^2) < +\infty$ . On supposera, de plus, que la fonction  $t \mapsto \mathbf{E}(X_t^2)$  est continue. Démontrer que  $\mathbf{E}(X_t) = ct$  et que  $\text{Var}(X_t) = c't$ ,  $c$  et  $c'$  étant des constantes.

**Exercice 8** Démontrer que, si  $\tau$  est un temps d'arrêt :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A}, \text{ pour tout } t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

définit une tribu.

**Exercice 9** Soit  $S$  un temps d'arrêt, démontrer que  $S$  est  $\mathcal{F}_S$  mesurable.

**Exercice 10** Soit  $S$  et  $T$  deux temps d'arrêt, tels que  $S \leq T$  **P** p.s. . Démontrer que  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ .

**Exercice 11** Soient  $S$  un temps d'arrêt, fini presque sûrement, et  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus adapté et presque sûrement continu.

1. Démontrer que, **P** p.s., pour tout  $s$  :

$$X_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{[k/n, (k+1)/n[}(s) X_{k/n}(\omega)$$

2. Prouver que l'application :

$$\begin{aligned} ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t) &\longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})) \\ (s, \omega) &\longmapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

est mesurable.

3. En déduire que si  $S \leq t$ ,  $X_S$  est  $\mathcal{F}_t$  mesurable, puis que  $X_S$  est  $\mathcal{F}_S$  mesurable.

**Exercice 12** Cette exercice est une introduction à l'intégrale stochastique. Il s'agit de construire une intégrale du type  $\int_0^{+\infty} f(s) dX_s$ , où  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien et  $f(s)$  est une fonction mesurable de  $(\mathbf{R}^+, \mathcal{B}(\mathbf{R}^+))$  dans  $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$  telle que :

$$\int_0^{+\infty} f^2(s) ds < +\infty.$$

Ce type d'intégrale s'appelle intégrale de Wiener et c'est un cas particulier de l'intégrale d'Ito qui est introduite au paragraphe 4.

On rappelle que l'ensemble  $\mathcal{H}$  des fonctions de la forme  $\sum_{0 \leq i \leq N-1} \alpha_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$ , avec  $\alpha_i \in \mathbf{R}$ , et  $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N$  est dense dans  $L^2(\mathbf{R}^+, dx)$  muni de la norme  $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(s) ds}$ .

1. Soit  $\alpha_i \in \mathbf{R}$ , et  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N$ , et  $f = \sum_{0 \leq i \leq N-1} \alpha_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$ . On pose :

$$I_e(f) = \sum_{0 \leq i \leq N-1} \alpha_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

Démontrer que  $I_e(f)$  est une variable aléatoire gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Démontrer en particulier que :

$$\mathbf{E}(I_e(f)^2) = \|f\|_{L^2}^2.$$

2. En déduire qu'il existe une unique application linéaire de  $L^2(\mathbf{R}^+, dx)$  à valeurs dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ,  $I$ , telle que  $I(f) = I_e(f)$ , si  $f$  est dans  $\mathcal{H}$  et  $\mathbf{E}(I(f)^2) = \|f\|_{L^2}^2$ , pour tout  $f$  dans  $L^2(\mathbf{R}^+)$ .
3. Démontrer que, si  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires gaussiennes centrées qui convergent dans  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  vers  $X$ , alors  $X$  est une variable aléatoire gaussienne centrée. En déduire que si  $f \in L^2(\mathbf{R}^+, dx)$  alors  $I(f)$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $\int_0^{+\infty} f^2(s) ds$ .
4. Soit  $f \in L^2(\mathbf{R}^+, dx)$ , on note  $Z_t = \int_0^t f(s) dX_s = \int \mathbf{1}_{]0,t]}(s) f(s) dX_s$ , démontrer que  $Z_t$  est un processus adapté à  $\mathcal{F}_t$ , et que  $Z_t - Z_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$  (commencer par traiter le cas  $f \in H$ ).
5. Démontrer que les processus  $Z_t$ ,  $Z_t^2 - \int_0^t f^2(s) ds$ ,  $\exp(Z_t - (1/2) \int_0^t f^2(s) ds)$  sont des  $\mathcal{F}_t$ -martingales.

**Exercice 13** Soient  $T$  un réel positif et  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  une  $\mathcal{F}_t$ -martingale continue. On suppose que  $\mathbf{E}(M_T^2)$  est fini.

1. Démontrer que  $(|M_t|)_{0 \leq t \leq T}$  une sous-martingale.
2. Montrer que, si  $M^* = \sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|$  :

$$\lambda \mathbf{P}(M^* \geq \lambda) \leq \mathbf{E}\left(|M_T| \mathbf{1}_{\{M^* \geq \lambda\}}\right)$$

(Utiliser le théorème d'arrêt pour la sous-martingale  $|M_t|$  entre  $\tau \wedge T$  où  $\tau = \inf\{t \leq T, |M_t| \geq \lambda\}$  (si cet ensemble est non vide,  $+\infty$  sinon) et  $T$ ).

3. Déduire du résultat précédent que, si  $A$  est positif :

$$\mathbf{E}((M^* \wedge A)^2) \leq 2\mathbf{E}((M^* \wedge A)|M_T|).$$

(Utiliser le fait que  $(M^* \wedge A)^p = \int_0^{M^* \wedge A} px^{p-1} dx$  pour  $p = 1, 2$ ).

4. Démontrer que,  $\mathbf{E}(M^*)$  est fini et que :

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2\right) \leq 4\mathbf{E}(|M_T|^2).$$

**Exercice 14** 1. Démontrer que si  $S$  et  $S'$  sont deux  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt alors  $S \wedge S' = \inf(S, S')$  et  $S \vee S' = \sup(S, S')$  sont des  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt.

2. En utilisant le temps d'arrêt  $S \vee s$  et le théorème d'arrêt démontrer que :

$$\mathbf{E}\left(M_s \mathbf{1}_{\{S > s\}} | \mathcal{F}_s\right) = M_s \mathbf{1}_{\{S > s\}}$$

3. En déduire que, si  $s \leq t$  :

$$\mathbf{E}\left(M_{S \wedge t} \mathbf{1}_{\{S > s\}} | \mathcal{F}_s\right) = M_s \mathbf{1}_{\{S > s\}},$$

4. En utilisant le fait que  $M_{S \wedge s}$  est  $\mathcal{F}_s$  mesurable, montrer que  $t \rightarrow M_{S \wedge t}$  est une  $\mathcal{F}_t$  martingale.

- Exercice 15** 1. Soit  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus mesurable adapté tel que  $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$ , p.s.. On pose  $M_t = \int_0^t H_s dW_s$ , (où  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement brownien standard). Montrer que si  $\mathbf{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} M_t^2 \right) < \infty$ , alors  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_t^2 dt \right) < \infty$ . On pourra introduire la suite de temps d'arrêt définie par  $\tau_n = \inf\{t \geq 0 \mid \int_0^t H_s^2 ds = n\}$  et montrer que  $\mathbf{E}(M_{T \wedge \tau_n}^2) = \mathbf{E} \left( \int_0^{T \wedge \tau_n} H_s^2 ds \right)$ .
2. On pose  $p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp(-x^2/2(1-t))$ , pour  $0 \leq t < 1$  et  $x \in \mathbf{R}$ , et  $p(1, x) = 0$ . Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq 1}$  le processus défini sur  $[0, 1]$  par  $M_t = p(t, W_t)$ .

(a) Montrer que

$$M_t = M_0 + \int_0^t \frac{\partial p}{\partial x}(s, W_s) dW_s.$$

(b) Soit  $H_t = (\partial p / \partial x)(t, W_t)$ . Montrer que  $\int_0^1 H_t^2 dt < \infty$ , p.s. et  $\mathbf{E} \left( \int_0^1 H_t^2 dt \right) = +\infty$ .

**Exercice 16** Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  une  $\mathcal{F}_t$ -martingale continue telle que  $M_t = \int_0^t K_s ds$ , où  $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus  $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ .

1. On suppose, de plus, que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\int_0^T |K_s| ds \leq C < +\infty$ . Démontrer que si  $t_i^n = Ti/n$  pour  $0 \leq i \leq n$ , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left( \sum_{i=1}^n (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \right) = 0.$$

2. Sous les hypothèses de la question précédente, démontrer que :

$$\mathbf{E} \left( \sum_{i=1}^n (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \right) = \mathbf{E} (M_T^2 - M_0^2).$$

En déduire  $M_T = 0$   $\mathbf{P}$  p.s., puis que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\forall t \leq T, M_t = 0$ .

3. On ne suppose plus que  $\int_0^T |K_s| ds$  soit borné mais seulement que cette variable aléatoire est finie presque sûrement. On admettra que la variable aléatoire  $\int_0^t |K_s| ds$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Montrer que  $T_n = \inf\{0 \leq s \leq T, \int_0^s |K_s| ds \geq n\}$  ( $T$  si cet ensemble est vide) est un temps d'arrêt. Prouver que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T$ . En déduire, en utilisant la suite de martingales  $(M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$ , que  $\mathbf{P}$  p.s.  $\forall t \leq T, M_t = 0$ .
4. Soit  $M_t$  une martingale de la forme  $\int_0^t H_s dW_s + \int_0^t K_s ds$  avec  $\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$   $\mathbf{P}$  p.s. et  $\int_0^t |K_s| ds < +\infty$   $\mathbf{P}$  p.s.. En utilisant la suite de temps d'arrêt  $T_n = \inf\{t \leq T, \int_0^t H_s^2 ds \geq n\}$ , démontrer que  $K_t = 0$  dt  $\times$   $\mathbf{P}$  p.s..

**Exercice 17** On s'intéresse à la solution  $X_t$  de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = (\mu X_t + \mu') dt + (\sigma X_t + \sigma') dW_t \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

On pose  $S_t = \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$ .

1. Ecrire l'équation différentielle stochastique dont est solution  $S_t^{-1}$ .
2. Démontrer que :

$$d(X_t S_t^{-1}) = S_t^{-1} ((\mu' - \sigma\sigma') dt + \sigma' dW_t).$$



3. En déduire une expression pour  $X_t$ .

**Exercice 18** Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. Le but de cet exercice est de calculer la loi du couple  $(W_t, \sup_{s \leq t} W_s)$ .

1. Soit  $S$  un temps d'arrêt borné. En utilisant le théorème d'arrêt pour la martingale  $M_t = \exp(izW_t + z^2t/2)$ , où  $z$  est un nombre réel, démontrer que, si  $0 \leq u \leq v$  :

$$\mathbf{E} \left( e^{iz(W_{v+s} - W_{u+s})} | \mathcal{F}_{u+s} \right) = e^{-\frac{z^2}{2}(v-u)}.$$

2. En déduire que  $W_u^S = W_{u+s} - W_S$  est un  $\mathcal{F}_{S+u}$ -mouvement brownien indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_S$ .

3. Soit  $(Y_t)_{t \geq 0}$  est un processus aléatoire continu indépendant de la tribu  $\mathcal{B}$  tel que  $\mathbf{E}(\sup_{0 \leq s \leq K} |Y_s|) < +\infty$ . Soit  $T$  une variable aléatoire  $\mathcal{B}$ -mesurable bornée par  $K$ , montrer que :

$$\mathbf{E}(Y_T | \mathcal{B}) = \mathbf{E}(Y_t) |_{t=T}.$$

On commencera par traiter le cas où  $T$  est de la forme  $\sum_{1 \leq i \leq n} t_i \mathbf{1}_{A_i}$ , où  $0 < t_1 < \dots < t_n = K$ , les  $A_i$  étant disjoints et  $\mathcal{B}$  mesurables.

4. On pose  $\tau^\lambda = \inf\{s \geq 0, W_s > \lambda\}$ , démontrer que, si  $f$  est une fonction borélienne bornée :

$$\mathbf{E} \left( f(W_t) \mathbf{1}_{\{\tau^\lambda \leq t\}} \right) = \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{\tau^\lambda \leq t\}} \phi(t - \tau^\lambda) \right),$$

où  $\phi(u) = \mathbf{E}(f(W_u + \lambda))$ . En déduire, en utilisant le fait que  $\mathbf{E}(f(W_u + \lambda)) = \mathbf{E}(f(-W_u + \lambda))$  que :

$$\mathbf{E} \left( f(W_t) \mathbf{1}_{\{\tau^\lambda \leq t\}} \right) = \mathbf{E} \left( f(2\lambda - W_t) \mathbf{1}_{\{\tau^\lambda \leq t\}} \right).$$

5. Montrer que si  $W_t^* = \sup_{s \leq t} W_s$  et si  $\lambda \geq 0$  :

$$\mathbf{P}(W_t \leq \lambda, W_t^* \geq \lambda) = \mathbf{P}(W_t \geq \lambda, W_t^* \geq \lambda) = \mathbf{P}(W_t \geq \lambda).$$

En déduire que  $W_t^*$  suit la même loi que  $|W_t|$ .

6. Démontrer que si  $\lambda \geq \mu$  et  $\lambda \geq 0$  :

$$\mathbf{P}(W_t \leq \mu, W_t^* \geq \lambda) = \mathbf{P}(W_t \geq 2\lambda - \mu, W_t^* \geq \lambda) = \mathbf{P}(W_t \geq 2\lambda - \mu).$$

et que si  $\lambda \leq \mu$  et  $\lambda \geq 0$  :

$$\mathbf{P}(W_t \leq \mu, W_t^* \geq \lambda) = 2\mathbf{P}(W_t \geq \lambda) - \mathbf{P}(W_t \geq \mu).$$

7. Vérifier que la loi du couple  $(W_t, W_t^*)$  est donnée par :

$$\mathbf{1}_{\{0 \leq y\}} \mathbf{1}_{\{x \leq y\}} \frac{2(2y-x)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2y-x)^2}{2t}\right) dx dy.$$



# Chapitre 4

## Modèle de Black et Scholes

Le problème traité par Black et Scholes dans [BS73] est l'évaluation et la couverture d'une option de type européen (call ou put) sur une action ne distribuant pas de dividendes. La méthode utilisée, qui repose sur des idées analogues à celles déjà présentées dans le cadre des modèles discrets dans le chapitre 1 de ce livre, conduit à des formules aujourd'hui couramment utilisées par les praticiens, malgré le caractère simplificateur du modèle. Dans ce chapitre, nous donnons une présentation actualisée des travaux de Black et Scholes. Le cas des options américaines est abordé et des extensions du modèle sont présentées dans les problèmes.

## 1 Description du modèle

### 1.1 L'évolution des cours

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix  $S_t$  à l'instant  $t$ ) et un actif sans risque (de prix  $S_t^0$  à l'instant  $t$ ). On suppose l'évolution de  $S_t^0$  régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad (4.1)$$

où  $r$  est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à  $r$  (noter que  $r$  est ici un taux d'intérêt instantané, à ne pas confondre avec le taux sur une période des modèles discrets). On posera  $S_0^0 = 1$ , de sorte que  $S_t^0 = e^{rt}$ , pour  $t \geq 0$ .

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t) \quad (4.2)$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont deux constantes et  $(B_t)$  un mouvement brownien standard.

Le modèle est étudié sur l'intervalle  $[0, T]$  où  $T$  est la date d'échéance de l'option à étudier. Comme nous l'avons vu (cf. chapitre 3, paragraphe 4.3), l'équation (4.2) se résout, explicitement :

$$S_t = S_0 \exp \left( \mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t \right),$$

où  $S_0$  est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, selon ce modèle, la loi de  $S_t$  est une loi log-normale (c'est à dire que son logarithme suit une loi normale).

Plus précisément, on voit que le processus  $(S_t)$  vérifie une équation du type (4.2) si et seulement si le processus  $(\log(S_t))$  est un mouvement brownien (non nécessairement standard). Compte tenu de la définition 2.1 du chapitre 3, cela signifie que le processus  $(S_t)$  vérifie les propriétés suivantes :

- continuité des trajectoires,
- indépendance des accroissements *relatifs* : si  $u \leq t$ ,  $S_t/S_u$  ou (ce qui revient au même), l'accroissement relatif  $(S_t - S_u)/S_u$  est indépendant de la tribu  $\sigma(S_v, v \leq u)$ ,
- stationnarité des accroissements relatifs : si  $u \leq t$ , la loi de  $(S_t - S_u)/S_u$  est identique à celle de  $(S_{t-u} - S_0)/S_0$ .

Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

## 1.2 Les stratégies autofinancées

Une stratégie sera définie par un processus  $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T} = (H_t^0, H_t)$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ , adapté à la filtration naturelle  $(\mathcal{F}_t)$  du mouvement brownien, les composantes  $H_t^0$  et  $H_t$  de  $\phi_t$  donnant, à l'instant  $t$ , les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué respectivement détenues en portefeuille. La valeur du portefeuille à l'instant  $t$  est alors donnée par :

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

Dans les modèles discrets, nous avons caractérisé les stratégies autofinancées par l'égalité :  $V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n)$  (cf. chapitre 1, remarque 1.1). La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinancement sous la forme suivante :

$$dV_t(\phi) = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t.$$

Pour que cette égalité ait un sens on imposera la condition :

$$\int_0^T |H_t^0| dt < +\infty \text{ p.s.} \quad \text{et} \quad \int_0^T H_t^2 dt < +\infty \text{ p.s.}$$

Alors l'intégrale :

$$\int_0^T H_t^0 dS_t^0 = \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt$$

est bien définie, ainsi que l'intégrale stochastique :

$$\int_0^T H_t dS_t = \int_0^T (H_t S_t \mu) dt + \int_0^T \sigma H_t S_t dB_t,$$

puisque la fonction  $t \mapsto S_t$  est continue, donc bornée sur  $[0, T]$ , presque sûrement.

**Définition 1.1** Une stratégie autofinancée est définie par un couple  $\phi$  de processus adaptés  $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  vérifiant :

1.  $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty$  p.s.
2.  $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u$  p.s., pour tout  $t \in [0, T]$ .

Nous noterons  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  le cours actualisé de l'actif risqué. La proposition suivante est l'analogie de la proposition 1.2 du chapitre 1.

**Proposition 1.2** Soit  $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ , vérifiant  $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty$  p.s. On pose :  $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$  et  $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$ . Alors,  $\phi$  définit une stratégie autofinancée si et seulement si :

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \text{ p.s.} \quad (4.3)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Démonstration :** Supposons la stratégie  $\phi$  autofinancée. De l'égalité :

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -r\tilde{V}_t(\phi)dt + e^{-rt}dV_t(\phi)$$

qui résulte de la différenciation du produit des processus  $(e^{-rt})$  et  $(V_t(\phi))$  (noter que le terme de crochets  $d \langle e^{-r\cdot}, V_t(\phi) \rangle_t$  est nul), on déduit :

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t(\phi) &= -re^{-rt} (H_t^0 e^{rt} + H_t S_t) dt + e^{-rt} H_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt} H_t dS_t \\ &= H_t (-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= H_t d\tilde{S}_t. \end{aligned}$$

D'où l'égalité (4.3). La démonstration de la réciproque repose sur un raisonnement analogue. ■

**Remarque 1.3** Nous n'avons pas imposé de condition de *prévisibilité* sur les stratégies, contrairement à ce que nous avons fait dans le chapitre 1. En fait, on peut définir une notion de processus prévisible à temps continu mais, dans le cas de la filtration d'un mouvement brownien, cela ne restreint pas la classe des processus adaptés de façon significative (en raison de la continuité des trajectoires du mouvement brownien).

Dans notre étude des modèles discrets complets, nous avons été amenés à nous placer sous une loi de probabilité équivalente à la probabilité initiale et sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales, puis nous avons construit des stratégies autofinancées simulant les options. Le paragraphe suivant présente les outils qui permettent de transposer ces méthodes au temps continu.

## 2 Changement de probabilité. Théorème de représentation des martingales

### 2.1 Probabilités équivalentes

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé. Une probabilité  $\mathbf{Q}$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  est dite absolument continue par rapport à  $\mathbf{P}$  si :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbf{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbf{Q}(A) = 0.$$

**Théorème 2.1**  $\mathbf{Q}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbf{P}$  si, et seulement si, il existe une variable aléatoire  $Z$  à valeurs positives ou nulles sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  telle que :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbf{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbf{P}(\omega),$$

$Z$  est appelée densité de  $\mathbf{Q}$  par rapport à  $\mathbf{P}$  et parfois notée  $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$ .

L'équivalence à démontrer est évidente dans un sens, la réciproque est une version du théorème de Radon-Nikodym (cf. par exemple [DCD82], tome 1).

Les probabilités  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont dites *équivalentes* si chacune d'elles est absolument continue par rapport à l'autre. Noter que si  $\mathbf{Q}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbf{P}$ , de densité  $Z$ , alors  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont équivalentes si et seulement si  $\mathbf{P}(Z > 0) = 1$ .

## 2.2 Théorème de Girsanov

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé filtré, dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ , indexé par l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Le théorème suivant, que nous admettrons, est connu sous le nom de théorème de Girsanov (cf. [KS88], [DCD83], chapitre 8).

**Théorème 2.2** Soit  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté vérifiant  $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$  p.s. et tel que le processus  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par :

$$L_t = \exp \left( - \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right)$$

soit une martingale. Alors, sous la probabilité  $\mathbf{P}^{(L)}$  de densité  $L_T$  par rapport à  $\mathbf{P}$ , le processus  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par  $W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ , est un mouvement brownien standard.

**Remarque 2.3** Une condition suffisante pour que  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  soit une martingale est que l'on ait :  $\mathbf{E} \left( \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \theta_t^2 dt \right) \right) < \infty$  (cf. [KS88], [DCD82]). La démonstration du théorème de Girsanov dans le cas où  $(\theta_t)$  est constant fait l'objet de l'exercice 19.

## 2.3 Théorème de représentation des martingales browniennes

Soit  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$  un mouvement brownien standard construit sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  et soit  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  sa filtration naturelle. Rappelons (cf. chapitre 3, proposition 4.4) que si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus adapté tel que  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_t^2 dt \right) < \infty$ , le processus  $\left( \int_0^t H_s dB_s \right)$  est une martingale de carré intégrable, nulle en 0. Le théorème suivant montre que toutes les martingales browniennes peuvent se représenter à l'aide d'une intégrale stochastique.

**Théorème 2.4** Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Il existe un processus adapté  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  tel que  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty$  et :

$$\forall t \in [0, T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s \text{ p.s.} \quad (4.4)$$

Noter que cette représentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement brownien (cf. exercice 26).

Il résulte du théorème que si  $U$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable de carré intégrable, on peut l'écrire sous la forme :

$$U = \mathbf{E}(U) + \int_0^T H_s dB_s \quad \text{p.s.}$$

où  $(H_t)$  est un processus adapté tel que  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_t^2 ds \right) < +\infty$ . Il suffit pour cela de considérer la martingale  $M_t = \mathbf{E}(U | \mathcal{F}_t)$ . On démontre aussi (cf., par exemple [KS88]) que si  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale (non nécessairement de carré intégrable) il existe une représentation du type (4.4) mais avec un processus vérifiant seulement  $\int_0^T H_t^2 ds < \infty$ , p.s. Nous utiliserons d'ailleurs ce résultat dans le chapitre 6.

### 3 Evaluation et couverture des options dans le modèle de Black et Scholes

#### 3.1 Une probabilité sous laquelle $(\tilde{S}_t)$ est une martingale

Nous reprenons maintenant le modèle introduit au paragraphe 1. Nous allons montrer qu'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale  $\mathbf{P}$ , sous laquelle le prix actualisé  $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$  de l'action est une martingale. Utilisant l'équation différentielle stochastique vérifiée par  $(S_t)$  on a :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t) \end{aligned}$$

et par conséquent, si on pose  $W_t = B_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ ,

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t. \quad (4.5)$$

D'après le théorème 2.2, appliqué en prenant  $\theta_t = \frac{\mu-r}{\sigma}$ , il existe une probabilité  $\mathbf{P}^*$  équivalente à  $\mathbf{P}$  sous laquelle  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement brownien standard. On admettra, par la suite, que la définition de l'intégrale stochastique est invariante par changement de probabilité équivalente (cf. exercice 25). Alors, si on se place sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ , on déduit de l'égalité (4.5) que  $(\tilde{S}_t)$  est une martingale et que :

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2).$$

#### 3.2 Pricing

Dans ce paragraphe, nous nous limiterons aux options européennes. Une option européenne sera définie par une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, positive  $h$ . Le plus souvent,  $h$  est de la forme  $f(S_T)$ , ( $f(x) = (x - K)_+$ , dans le cas d'un call,  $f(x) = (K - x)_+$  dans le cas d'un put). Comme dans le cas discret, nous allons définir la valeur de l'option en la simulant. Pour des raisons techniques, nous limiterons la classe des stratégies admissibles de la façon suivante :

**Définition 3.1** Une stratégie  $\phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$  est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée  $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t$  du portefeuille correspondant est, pour tout  $t$ , positive et telle que  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  est de carré intégrable sous  $\mathbf{P}^*$ .

On dira qu'une option est simulable si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible. Il est clair que pour que l'option définie par  $h$  soit simulable, il est nécessaire que  $h$  soit de carré intégrable sous  $\mathbf{P}^*$ . Dans le cas du call ( $h = (S_T - K)_+$ ), cette propriété est bien vérifiée puisque  $\mathbf{E}^*(S_T^2) < \infty$ ; notons que dans le cas du put,  $h$  est même bornée.

**Théorème 3.2** Dans le modèle de Black et Scholes, toute option définie par une variable aléatoire  $h$ , positive,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$  est simulable et la valeur à l'instant  $t$  de tout portefeuille simulant est donnée par :

$$V_t = \mathbf{E}^* \left( e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right).$$

La valeur de l'option à l'instant  $t$  est donc définie de façon naturelle par l'expression  $\mathbf{E}^* \left( e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right)$ .

**Démonstration :** Supposons tout d'abord qu'il existe une stratégie admissible  $(H^0, H)$ , simulant l'option. La valeur à l'instant  $t$  du portefeuille  $(H_t^0, H_t)$  est donnée par :

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$$

et l'on a, par hypothèse,  $V_T = h$ . Soit  $\tilde{V}_t = V_t e^{-rt}$ , la valeur actualisée :

$$\tilde{V}_t = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t.$$

Puisque la stratégie est autofinancée, on a, d'après la proposition 1.2 et l'égalité (4.5) :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u \\ &= V_0 + \int_0^t H_u \sigma \tilde{S}_u dW_u. \end{aligned}$$

Sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ ,  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  est de carré intégrable, d'après la définition des stratégies admissibles, et l'égalité qui précède fait apparaître le processus  $(\tilde{V}_t)$  comme une intégrale stochastique par rapport à  $(W_t)$ . Il en résulte (cf. chapitre 3, équation (3.6) et proposition 4.4) que  $(\tilde{V}_t)$  est, sous  $\mathbf{P}^*$ , une martingale de carré intégrable. D'où :

$$\tilde{V}_t = \mathbf{E}^* \left( \tilde{V}_T | \mathcal{F}_t \right),$$

et par conséquent :

$$V_t = \mathbf{E}^* \left( e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right). \quad (4.6)$$

Nous avons ainsi montré que si le portefeuille  $(H^0, H)$  simule l'option définie par  $h$ , sa valeur est donnée par l'égalité (4.6). Pour achever la démonstration du théorème, il reste à démontrer que l'option est bien simulable, c'est-à-dire à trouver des processus  $(H_t^0)$  et  $(H_t)$  définissant une stratégie admissible et tels que :

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = \mathbf{E}^* \left( e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right).$$

Or, sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ , le processus défini par  $M_t = \mathbf{E}^* \left( e^{-rT} h | \mathcal{F}_t \right)$  est une martingale de carré intégrable. La filtration  $(\mathcal{F}_t)$ , filtration naturelle de  $(B_t)$ , est aussi la filtration naturelle de  $(W_t)$  et, d'après le théorème de représentation des martingales browniennes, il existe un processus adapté  $(K_s)_{0 \leq s \leq T}$  tel que  $\mathbf{E}^* \left( \int_0^T K_s^2 ds \right) < +\infty$  et :

$$\forall t \in [0, T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s \text{ p.s..}$$

La stratégie  $\phi = (H^0, H)$ , avec  $H_t = K_t / (\sigma \tilde{S}_t)$  et  $H_t^0 = M_t - H_t \tilde{S}_t$ , est alors, d'après la proposition 1.2 et l'égalité (4.5), une stratégie autofinancée, dont la valeur à l'instant  $t$  est donnée par :

$$V_t(\phi) = e^{rt} M_t = \mathbf{E}^* \left( e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right)$$

et il est clair sur cette expression que  $V_t(\phi)$  est une variable aléatoire positive, que  $\sup_{t \in [0, T]} V_t(\phi)$  est de carré intégrable sous  $\mathbf{P}^*$  et que  $V_T(\phi) = h$ . On a donc bien une stratégie admissible simulant  $h$ . ■



**Remarque 3.3** Lorsque la variable aléatoire  $h$  est de la forme  $h = f(S_T)$ , on peut expliciter la valeur  $V_t$  de l'option à l'instant  $t$  comme une fonction de  $t$  et  $S_t$ . On a en effet :

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbf{E}^* \left( e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbf{E}^* \left( e^{-r(T-t)} f \left( S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - (\sigma^2/2)(T-t)} \right) | \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

La variable aléatoire  $S_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et, sous  $\mathbf{P}^*$ ,  $W_T - W_t$  est indépendante de  $\mathcal{F}_t$ . On a donc, en utilisant la proposition 2.5 de l'appendice,

$$V_t = F(t, S_t),$$

avec :

$$F(t, x) = \mathbf{E}^* \left( e^{-r(T-t)} f \left( x e^{r(T-t)} e^{\sigma(W_T - W_t) - (\sigma^2/2)(T-t)} \right) \right) \quad (4.7)$$

et comme, sous  $\mathbf{P}^*$ ,  $W_T - W_t$  est une gaussienne centrée de variance  $T - t$  :

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f \left( x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma y \sqrt{T-t}} \right) \frac{e^{-y^2/2} dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Le calcul de  $F$  peut être poussé plus loin dans le cas du call et du put. Si l'on prend l'exemple du call, avec  $f(x) = (x - K)_+$ , on a, d'après l'égalité (4.7) :

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \mathbf{E}^* \left( e^{-r(T-t)} \left( x e^{(r-\sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} - K \right)_+ \right) \\ &= \mathbf{E} \left( x e^{\sigma\sqrt{\theta}g - \sigma^2\theta/2} - K e^{-r\theta} \right)_+ \end{aligned}$$

où  $g$  est une gaussienne centrée réduite et  $\theta = T - t$ .

Introduisons les quantités :

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}.$$

Avec ces notations, on a

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \mathbf{E} \left[ \left( x e^{\sigma\sqrt{\theta}g - \sigma^2\theta/2} - K e^{-r\theta} \right) \mathbf{1}_{\{g + d_2 \geq 0\}} \right] \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty} \left( x e^{\sigma\sqrt{\theta}y - \sigma^2\theta/2} - K e^{-r\theta} \right) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{d_2} \left( x e^{-\sigma\sqrt{\theta}y - \sigma^2\theta/2} - K e^{-r\theta} \right) \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy. \end{aligned}$$

En écrivant cette expression comme la différence de deux intégrales et en faisant dans la première le changement de variable  $z = y + \sigma\sqrt{\theta}$ , on obtient :

$$F(t, x) = xN(d_1) - K e^{-r\theta}N(d_2), \quad (4.8)$$

avec :

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-x^2/2} dx.$$

Pour le put, un calcul analogue donne, avec les mêmes notations :

$$F(t, x) = K e^{-r\theta}N(-d_2) - xN(-d_1) \quad (4.9)$$

Pour des méthodes de calcul efficaces de  $N(d)$  on pourra se reporter au chapitre 8.

**Remarque 3.4** Un des traits majeurs du modèle de Black-Scholes (et une des raisons de son succès) est que les formules de prix obtenues, de même que les formules de couverture que nous donnerons plus loin, dépendent d'un seul paramètre non directement observable : le paramètre  $\sigma$ , appelé "volatilité" par les praticiens (le paramètre de dérive  $\mu$  disparaît sous l'effet du changement de probabilité). Dans la pratique, deux méthodes sont utilisées pour évaluer  $\sigma$  :

1. la méthode historique : dans le cadre du modèle,  $\sigma^2 T$  est la variance de  $\log(S_T)$  et les variables  $\log(S_T/S_0)$ ,  $\log(S_{2T}/S_T)$ ,  $\dots$ ,  $\log(S_{NT}/S_{(N-1)T})$  sont indépendantes équidistribuées. Dès lors, on peut, à partir des valeurs du cours observées dans le passé, estimer  $\sigma$  par des voies statistiques (par exemple à l'aide de variances empiriques ; cf. [DCD82], chapitre 5).
2. la méthode "implicite" : certaines options sont cotées sur des marchés organisés et le prix des options (calls et puts) étant une fonction strictement croissante de  $\sigma$  (cf. exercice 21), à chaque option cotée, on peut associer une volatilité "implicite", par inversion de la formule de Black-Scholes. Le modèle ainsi identifié peut ensuite être utilisé pour les calculs de couverture.

Dans ces questions de volatilité, on se heurte vite aux imperfections du modèle de Black-Scholes : on constate des différences importantes entre volatilité historique et volatilité implicite et la volatilité implicite semble dépendre du prix d'exercice et de l'échéance. Malgré ces incohérences, le modèle constitue une référence indispensable pour les praticiens.

### 3.3 Couverture des calls et des puts

Dans la démonstration du théorème 3.2, nous avons invoqué le théorème de représentation des martingales browniennes pour montrer l'existence d'un portefeuille simulant. Dans la pratique, il importe de pouvoir construire effectivement le portefeuille simulant pour couvrir une option et on ne peut pas se contenter d'un simple théorème d'existence.

Nous allons voir comment, dans le cas où l'option est définie par une variable aléatoire de la forme  $h = f(S_T)$ , on peut expliciter le portefeuille de couverture. Un portefeuille simulant doit avoir, à chaque instant  $t$ , une valeur actualisée égale à :

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} F(t, S_t),$$

où  $F$  est la fonction définie par l'égalité (4.7). Sous des hypothèses très larges sur  $f$  (et, en particulier, dans les cas du call et du put où on dispose des formules explicites de la remarque 3.3), on voit que la fonction  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$ . Si on pose :

$$\tilde{F}(t, x) = e^{-rt} F(t, xe^{rt}).$$

on a :  $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$  et, pour  $t < T$ , d'après la formule d'Ito :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) &= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) d\tilde{S}_u \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(u, \tilde{S}_u) du + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(u, \tilde{S}_u) d \langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle_u \end{aligned}$$

De l'égalité  $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t$ , on déduit :

$$d \langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle_u = \sigma^2 \tilde{S}_u^2 du,$$

ce qui fait apparaître  $\tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$  sous la forme suivante :

$$\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) \tilde{S}_u dW_u + \int_0^t K_u du.$$

Comme on sait que  $\tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ , le processus  $K_u$  est nécessairement nul (cf. chapitre 3, exercice 16). D'où :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) &= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) \tilde{S}_u dW_u \\ &= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(u, \tilde{S}_u) d\tilde{S}_u. \end{aligned}$$

Le candidat naturel pour le processus de couverture  $H_t$  est alors :

$$H_t = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t, \tilde{S}_t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t).$$

Si on pose  $H_t^0 = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) - H_t \tilde{S}_t$ , le portefeuille  $(H_t^0, H_t)$  est autofinancé et sa valeur actualisée est bien  $\tilde{V}_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$ .

**Remarque 3.5** Le raisonnement qui précède montre qu'on peut traiter les options de la forme  $f(S_T)$  sans utiliser le théorème de représentation des martingales browniennes.

**Remarque 3.6** Dans le cas du call, on a, avec les notations de la remarque 3.3,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = N(d_1).$$

et dans le cas du put :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = -N(-d_1).$$

On pourra le vérifier en exercice (la façon la plus simple de faire le calcul est de dériver sous le signe d'espérance). Cette quantité est souvent appelée le "delta" de l'option par les praticiens. Plus généralement, lorsque la valeur à l'instant  $t$  d'un portefeuille peut s'écrire  $\Psi(t, S_t)$ , la quantité  $(\partial \Psi / \partial x)(t, S_t)$ , qui mesure la sensibilité du portefeuille aux variations du cours à l'instant  $t$ , est appelée le "delta" du portefeuille. On parle de "gamma" pour la dérivée seconde  $(\partial^2 \Psi / \partial x^2)(t, S_t)$ , de "thêta" pour la dérivée par rapport au temps et de "véga" pour la dérivée de  $\Psi$  par rapport à la volatilité  $\sigma$ .

## 4 Options américaines dans le modèle de Black-Scholes

### 4.1 Evaluation des options américaines

Nous avons vu, dans le chapitre 2, les liens entre l'évaluation des options américaines et le problème d'arrêt optimal dans le cadre de modèles discrets. La théorie de l'arrêt optimal en temps continu repose sur les mêmes idées qu'en temps discret, mais la mise en œuvre de ces idées soulève, dans ce cadre, de sérieuses difficultés techniques. En ce qui concerne les options américaines, il est clair que l'approche que nous avons utilisée dans le paragraphe 3.3 du chapitre 2, basée sur une relation de récurrence, n'est pas directement transposable. L'exercice

5 du chapitre 2 montre que, dans un modèle discret, à toute option américaine peut être associée une stratégie de couverture dans laquelle une certaine consommation est autorisée. C'est à partir de stratégies de gestion avec consommation que nous allons étudier les options américaines dans le modèle de Black-Scholes.

**Définition 4.1** Une stratégie de gestion avec consommation est la donnée d'un processus adapté  $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ , vérifiant les propriétés suivantes :

1.  $\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty$  p.s.
2.  $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u - C_t$  pour tout  $t \in [0, T]$ , où  $(C_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus croissant continu adapté nul en  $t = 0$ ,  $C_t$  représentant la consommation cumulée jusqu'à l'instant  $t$ .

Une option américaine est naturellement définie par un processus adapté, à valeurs positives  $(h_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Pour simplifier, nous nous limiterons à des processus de la forme  $h_t = \psi(S_t)$ , où  $\psi$  est une fonction continue de  $\mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}_+$ , vérifiant :  $\psi(x) \leq A + Bx$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}_+$ , pour des constantes  $A$  et  $B$  positives. Pour un call, on a :  $\psi(x) = (x - K)_+$  et pour un put :  $\psi(x) = (K - x)_+$ .

Nous dirons que la stratégie de gestion avec consommation  $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$  couvre l'option américaine définie par  $h_t = \psi(S_t)$  si, en notant  $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ , on a :

$$\forall t \in [0, T] \quad V_t(\phi) \geq \psi(S_t) \text{ p.s.}$$

Notons  $\Phi^\psi$  l'ensemble des stratégies de gestion avec consommation qui couvrent l'option américaine définie par  $h_t = \psi(S_t)$ . Si le vendeur de l'option suit une stratégie  $\phi \in \Phi^\psi$ , il dispose, à chaque instant  $t$ , d'une richesse au moins égale à  $\psi(S_t)$ , qui est la somme à fournir en cas d'exercice de l'option à l'instant  $t$ . L'énoncé suivant fait apparaître la valeur minimale d'une stratégie de couverture d'une option américaine :

**Théorème 4.2** Soit  $u$  l'application de  $[0, T] \times \mathbf{R}_+$  dans  $\mathbf{R}$  définie par :

$$u(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbf{E}^* \left[ e^{-r(\tau-t)} \psi \left( x \exp \left( (r - (\sigma^2/2))(\tau - t) + \sigma(W_\tau - W_t) \right) \right) \right]$$

où  $\mathcal{T}_{t, T}$  désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans  $[t, T]$ . Il existe une stratégie  $\bar{\phi} \in \Phi^\psi$  telle que  $V_t(\bar{\phi}) = u(t, S_t)$ , pour tout  $t \in [0, T]$ . De plus, pour toute stratégie  $\phi \in \Phi^\psi$ , on a :  $V_t(\phi) \geq u(t, S_t)$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

Pour éviter les difficultés techniques, nous donnerons seulement le schéma de la démonstration de ce théorème, renvoyant à [Kar88, Kar89] pour les détails.

On montre d'abord que le processus  $(e^{-rt}u(t, S_t))$  est l'enveloppe de Snell du processus  $(e^{-rt}\psi(S_t))$ , c'est-à-dire la plus petite surmartingale qui le majore, sous  $\mathbf{P}^*$ . Or, on peut montrer que la valeur actualisée d'une stratégie de gestion avec consommation est une surmartingale sous  $\mathbf{P}^*$ . On a donc l'inégalité :  $V_t(\phi) \geq u(t, S_t)$ , pour toute stratégie  $\phi \in \Phi^\psi$ . L'obtention d'une stratégie  $\bar{\phi}$  telle que  $V_t(\bar{\phi}) = u(t, S_t)$  repose sur un théorème de décomposition des surmartingales analogue à la proposition 3.1 du chapitre 2 et sur le théorème de représentation des martingales browniennes.

Il est naturel de considérer que  $u(t, S_t)$  représente la valeur de l'option américaine à l'instant  $t$ , puisque c'est la valeur minimale d'une stratégie qui couvre l'option.

**Remarque 4.3** Soit  $\tau$  un temps d'arrêt à valeurs dans  $[0, T]$ . La valeur à l'instant 0 d'une stratégie admissible au sens de la définition 3.1 et de valeur  $\psi(S_\tau)$  à l'instant  $\tau$  est donnée par  $\mathbf{E}^*(e^{-r\tau}\psi(S_\tau))$ , puisque la valeur actualisée de toute stratégie admissible est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ . La quantité  $u(0, S_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}^*(e^{-r\tau}\psi(S_\tau))$  est donc bien la richesse initiale permettant de couvrir exactement tous les exercices possibles.

Comme dans les modèles discrets, on constate que le prix du call américain (sur une action ne distribuant pas de dividende) est égal au prix du call européen :

**Proposition 4.4** Si, dans le théorème 4.2,  $\psi$  est donnée par  $\psi(x) = (x - K)_+$ , pour tout réel  $x$ , alors on a :

$$u(t, x) = F(t, x)$$

où  $F$  est la fonction définie par la relation (4.8) donnant le prix du call européen.

**Démonstration :** Supposons pour simplifier  $t = 0$  (le raisonnement est le même pour  $t > 0$ ). Alors, il suffit de démontrer que pour tout temps d'arrêt  $\tau$ ,

$$\mathbf{E}^*(e^{-r\tau}(S_\tau - K)_+) \leq \mathbf{E}^*(e^{-rT}(S_T - K)_+) = \mathbf{E}^*(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+$$

Or, on a :

$$\mathbf{E}^*((\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+ | \mathcal{F}_\tau) \geq \mathbf{E}^*((\tilde{S}_T - e^{-rT}K) | \mathcal{F}_\tau) = \tilde{S}_\tau - e^{-r\tau}K$$

puisque  $(\tilde{S}_t)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ . D'où :

$$\mathbf{E}^*((\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+ | \mathcal{F}_\tau) \geq \tilde{S}_\tau - e^{-r\tau}K$$

puisque  $r \geq 0$  et, puisque le membre de gauche est positif,

$$\mathbf{E}^*((\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+ | \mathcal{F}_\tau) \geq (\tilde{S}_\tau - e^{-r\tau}K)_+.$$

D'où l'inégalité annoncée en prenant l'espérance. ■

## 4.2 Puts perpétuels, prix critique

Dans le cas du put, le prix de l'option américaine n'est pas égal à celui de l'option européenne et il n'existe pas de formule explicite donnant la fonction  $u$ . On doit donc recourir à des méthodes de calcul approché qui seront abordées dans le chapitre 5. Dans ce paragraphe nous nous contenterons de déduire de la formule :

$$u(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}^* \left( Ke^{-r(\tau-t)} - x \exp \left( -\sigma^2(\tau-t)/2 + \sigma(W_\tau - W_t) \right) \right)_+ \quad (4.10)$$

quelques propriétés de la fonction  $u$ . Nous supposons, pour simplifier,  $t = 0$ . En fait, on peut toujours se ramener à ce cas-là, quitte à changer  $T$  en  $T - t$ . L'équation (4.10) devient alors :

$$u(0, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}^* \left( Ke^{-r\tau} - x \exp \left( \sigma W_\tau - (\sigma^2\tau/2) \right) \right)_+ \quad (4.11)$$

Considérons un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , sur lequel est défini un mouvement brownien standard  $(B_t)_{0 \leq t < \infty}$  défini sur  $\mathbf{R}_+$ . Alors, on a :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T}} \mathbf{E} \left( \left( K e^{-r\tau} - x \exp \left( \sigma B_\tau - (\sigma^2 \tau / 2) \right) \right)_+ \right) \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, \infty}} \mathbf{E} \left[ \left( K e^{-r\tau} - x \exp \left( \sigma B_\tau - (\sigma^2 \tau / 2) \right) \right)_+ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

en notant  $\mathcal{T}_{0, \infty}$  l'ensemble de tous les temps d'arrêt de la filtration de  $(B_t)_{t \geq 0}$  et  $\mathcal{T}_{0, T}$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{T}_{0, \infty}$  à valeurs dans  $[0, T]$ . Le membre de droite de l'inégalité (4.12) s'interprète naturellement comme la valeur d'un put "perpétuel" (c'est-à-dire exerçable à tout moment sans limite d'échéance). La proposition suivante permet d'expliciter la majoration (4.12).

**Proposition 4.5** *La fonction :*

$$u^\infty(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, \infty}} \mathbf{E} \left[ \left( K e^{-r\tau} - x \exp \left( \sigma B_\tau - (\sigma^2 \tau / 2) \right) \right)_+ \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} \right] \quad (4.13)$$

est donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} u^\infty(x) &= K - x \quad \text{pour } x \leq x^* \\ u^\infty(x) &= (K - x^*) \left( \frac{x}{x^*} \right)^{-\gamma} \quad \text{pour } x > x^* \end{aligned}$$

avec  $x^* = \frac{K\gamma}{1+\gamma}$  et  $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}$ .

**Démonstration :** On déduit de la formule (4.13) que la fonction  $u^\infty$  est convexe, décroissante sur  $[0, \infty[$  et vérifie :  $u^\infty(x) \geq (K - x)_+$  et, pour tout  $T > 0$ ,  $u^\infty(x) \geq \mathbf{E}(K e^{-rT} - x e^{\sigma B_T - (\sigma^2 T/2)})_+$ , ce qui implique :  $u^\infty(x) > 0$ , pour tout  $x \geq 0$ . Notons maintenant  $x^* = \sup\{x \geq 0 \mid u^\infty(x) = K - x\}$ . Les propriétés de  $u^\infty$  que nous venons d'énumérer entraînent :

$$\forall x \leq x^* \quad u^\infty(x) = K - x \quad \text{et} \quad \forall x > x^* \quad u^\infty(x) > (K - x)_+. \quad (4.14)$$

Par ailleurs, la théorie de l'enveloppe de Snell à temps continu (cf. [Kar81], [Kus77], ainsi que le chapitre 5) permet de montrer que :

$$u^\infty(x) = \mathbf{E} \left[ \left( K e^{-r\tau_x} - x \exp \left( \sigma B_{\tau_x} - (\sigma^2 \tau_x / 2) \right) \right)_+ \mathbf{1}_{\{\tau_x < \infty\}} \right]$$

où  $\tau_x$  est le temps d'arrêt défini par  $\tau_x = \inf\{t \geq 0 \mid e^{-rt} u^\infty(X_t^x) = e^{-rt} (K - X_t^x)_+\}$  (avec  $\inf \emptyset = \infty$ ), le processus  $(X_t^x)$  étant défini par :  $X_t^x = x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$ . Le temps d'arrêt  $\tau_x$  est donc un temps d'arrêt optimal (noter l'analogie avec les résultats du chapitre 2).

Il résulte des relations (4.14) que

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^x \leq x^*\} = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \leq \log(x^*/x) \right\}$$

Introduisons, pour tout nombre  $z \in \mathbf{R}_+$ , le temps d'arrêt  $\tau_{x,z}$  défini par :

$$\tau_{x,z} = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^x \leq z\}.$$

Avec ces notations, le temps d'arrêt optimal est donné par  $\tau_x = \tau_{x,x^*}$ . Le nombre  $x$  étant fixé, notons  $\phi$  la fonction de  $z$  définie par :

$$\phi(z) = \mathbf{E} \left( e^{-r\tau_{x,z}} \mathbf{1}_{\{\tau_{x,z} < \infty\}} (K - X_{\tau_{x,z}}^x)_+ \right).$$

Puisque  $\tau_{x,x^*}$  est optimal, la fonction  $\phi$  admet son maximum au point  $z = x^*$ . Nous allons calculer  $\phi$  explicitement, puis nous la maximiserons pour déterminer  $x^*$  et  $u^\infty(x) = \phi(x^*)$ .

Si  $z > x$ , on a évidemment  $\tau_{x,z} = 0$  et  $\phi(z) = (K - x)_+$ . Si  $z \leq x$ , on a, en utilisant la continuité des trajectoires de  $(X_t^x)_{t \geq 0}$ ,

$$\tau_{x,z} = \inf\{t \geq 0 | X_t^x = z\}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \phi(z) &= (K - z)_+ \mathbf{E} \left( e^{-r\tau_{x,z}} \mathbf{1}_{\{\tau_{x,z} < \infty\}} \right) \\ &= (K - z)_+ \mathbf{E} (e^{-r\tau_{x,z}}) \end{aligned}$$

avec, par convention,  $e^{-r\infty} = 0$ . En reprenant l'expression de  $X_t^x$  en fonction de  $B_t$ , on voit que, pour  $z \leq x$ ,

$$\begin{aligned} \tau_{x,z} &= \inf \left\{ t \geq 0 \mid \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t = \log(z/x) \right\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0 \mid \mu t + B_t = \frac{1}{\sigma} \log(z/x) \right\}, \end{aligned}$$

en posant  $\mu = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ . Donc, si on note, pour tout réel  $b$ ,

$$T_b = \inf\{t \geq 0 | \mu t + B_t = b\},$$

on a :

$$\phi(z) = \begin{cases} (K - x)_+ & \text{si } z > x \\ (K - z) \mathbf{E} \left( e^{-rT_{\log(z/x)/\sigma}} \right) & \text{si } z \in [0, x] \cap [0, K] \\ 0 & \text{si } z \in [0, x] \cap [K, +\infty[. \end{cases}$$

Le maximum de  $\phi$  est donc atteint sur l'intervalle  $[0, x] \cap [0, K]$ . En utilisant la formule suivante (démontrée dans l'exercice 24) :

$$\mathbf{E} (e^{-\alpha T_b}) = \exp \left( \mu b - |b| \sqrt{\mu^2 + 2\alpha} \right),$$

on voit que

$$\forall z \in [0, x] \cap [0, K] \quad \phi(z) = (K - z) \left( \frac{z}{x} \right)^\gamma,$$

en posant  $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}$ . La dérivée de cette fonction est donnée par

$$\phi'(z) = \frac{z^{\gamma-1}}{x^\gamma} (K\gamma - (\gamma + 1)z).$$

Il en résulte que si  $x \leq \frac{K\gamma}{\gamma+1}$ ,  $\max_z \phi(z) = \phi(x) = K - x$  et si  $x > \frac{K\gamma}{\gamma+1}$ ,  $\max_z \phi(z) = \phi\left(\frac{K\gamma}{\gamma+1}\right)$ , ce qui donne les formules annoncées. ■

**Remarque 4.6** Revenons au put américain d'échéance  $T$  finie. En raisonnant comme au début de la démonstration de la proposition 4.5, on voit que, pour chaque  $t \in [0, T[$ , il existe un réel  $s(t)$  vérifiant :

$$\forall x \leq s(t) \quad u(t, x) = K - x \quad \text{et} \quad \forall x > s(t) \quad u(t, x) > (K - x)_+. \quad (4.15)$$

Compte-tenu de l'inégalité (4.12), on a  $s(t) \geq x^*$ , pour tout  $t \in [0, T[$ . Le réel  $s(t)$  s'interprète comme le "prix critique" à l'instant  $t$  : si le prix de l'actif sous-jacent à l'instant  $t$  est inférieur à  $s(t)$ , le détenteur de l'option a intérêt à exercer immédiatement son option ; dans le cas contraire, il a intérêt à la conserver.

**Remarque bibliographique :** La présentation que nous avons utilisée, basée sur le théorème de Girsanov, est inspirée de [HP81] (voir aussi [Ben84], et le paragraphe 5.8 de [KS88]). L'approche historique de [BS73] et [Mer73] consistait à dégager, à partir d'un raisonnement d'arbitrage et de la formule d'Itô, une équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction donnant le prix du call en fonction du temps et du cours spot. Pour les méthodes statistiques de détermination des paramètres des modèles, on pourra se référer à [DCD82] et [DCD83] et à la bibliographie de ces ouvrages.

## 5 Exercices

**Exercice 19** Le but de l'exercice est de montrer le théorème de Girsanov 2.2 dans le cas où le processus  $(\theta_t)$  est constant. Soit  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$  un mouvement brownien standard par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  et soit  $\mu$  un nombre réel. On pose, pour  $0 \leq t \leq T$ ,  $L_t = e^{-\mu B_t - (\mu^2/2)t}$ .

1. Montrer que  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  et que  $\mathbf{E}(L_t) = 1$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .
2. On note  $\mathbf{P}^{(L_t)}$  la probabilité de densité  $L_t$  par rapport à la probabilité initiale  $\mathbf{P}$ . Montrer que les probabilités  $\mathbf{P}^{(L_T)}$  et  $\mathbf{P}^{(L_t)}$  coïncident sur la tribu  $\mathcal{F}_t$ .
3. Soit  $Z$  une variable aléatoire bornée  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. Montrer que l'espérance conditionnelle de  $Z$ , sous la probabilité  $\mathbf{P}^{(L_T)}$ , sachant  $\mathcal{F}_t$ , est donnée par :

$$\mathbf{E}^{(L_T)}(Z | \mathcal{F}_t) = \frac{\mathbf{E}(Z L_T | \mathcal{F}_t)}{L_t}.$$

4. On pose  $W_t = \mu t + B_t$ , pour tout  $t \in [0, T]$ . Montrer que pour tout réel  $u$  et pour tous  $s$  et  $t$  dans  $[0, T]$ , avec  $s \leq t$ , on a :

$$\mathbf{E}^{(L_T)} \left( e^{iu(W_t - W_s)} \middle| \mathcal{F}_s \right) = e^{-u^2(t-s)/2}$$

Conclure en utilisant la proposition 2.2 de l'appendice.

**Exercice 20** Montrer qu'il y a unicité (en précisant en quel sens) du portefeuille simulant une option européenne dans le modèle de Black-Scholes.

**Exercice 21** On considère une option de la forme  $h = f(S_T)$  et on note  $F$  la fonction donnant le prix de l'option en fonction du temps et du cours spot (cf. équation (4.7)).

1. Montrer que si  $f$  est croissante (resp. décroissante),  $F(t, x)$  est une fonction croissante (resp. décroissante) de  $x$ .



2. On suppose  $f$  convexe. Montrer que  $F(t, x)$  est une fonction convexe de  $x$ , une fonction décroissante de  $t$  si  $r = 0$  et une fonction croissante de  $\sigma$  dans tous les cas (partir de l'équation (4.7) et utiliser l'inégalité de Jensen :  $\Phi(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(\Phi(X))$ , valable pour toute fonction  $\Phi$  convexe et pour toute variable aléatoire  $X$  telle que  $X$  et  $\Phi(X)$  soient intégrables).
3. On note  $F_c$  (resp.  $F_p$ ) la fonction  $F$  obtenue quand  $f(x) = (x-K)_+$  (resp.  $f(x) = (K-x)_+$ ). Montrer que  $F_c(t, \cdot)$  et  $F_p(t, \cdot)$  sont strictement positives pour  $t < T$ . Étudier les fonctions  $F_c(t, \cdot)$  et  $F_p(t, \cdot)$  au voisinage de 0 et  $+\infty$ .

**Exercice 22** Calculer, sous la probabilité initiale  $\mathbf{P}$ , la probabilité qu'un call européen soit exercé.

**Exercice 23** Justifier les formules 4.8 et 4.9 et calculer, pour un call et un put le delta, le gamma, le thêta et le véga (cf. remarque 3.6).

**Exercice 24** Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien standard. Pour tous nombres réels  $\mu$  et  $b$ , on pose :

$$T_b^\mu = \inf\{t \geq 0 \mid \mu t + B_t = b\}$$

avec la convention :  $\inf \emptyset = \infty$ .

1. En utilisant le théorème de Girsanov, montrer l'égalité suivante :

$$\forall \alpha, t > 0 \quad \mathbf{E} \left( e^{-\alpha(T_b^\mu \wedge t)} \right) = \mathbf{E} \left( e^{-\alpha(T_b^0 \wedge t)} e^{\mu B_{T_b^0 \wedge t} - \frac{\mu^2}{2} T_b^0 \wedge t} \right).$$

2. Montrer l'inégalité :

$$\forall \alpha, t > 0 \quad \mathbf{E} \left( e^{-\alpha(T_b^0 \wedge t)} e^{\mu B_{T_b^0 \wedge t} - \frac{\mu^2}{2} T_b^0 \wedge t} \mathbf{1}_{\{t < T_b^0\}} \right) \leq e^{-\alpha t}.$$

3. Dédire de ce qui précède et des résultats du chapitre 3 (proposition 3.6) que :

$$\forall \alpha > 0 \quad \mathbf{E} \left( e^{-\alpha T_b^\mu} \mathbf{1}_{\{T_b^\mu < \infty\}} \right) = e^{\mu b - |b| \sqrt{2\alpha + \mu^2}}.$$

4. Calculer  $\mathbf{P}(T_b^\mu < \infty)$ .

**Exercice 25** 1. Soient  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  deux probabilités équivalentes sur un espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Montrer que si une suite  $(X_n)$  de variables aléatoires converge en probabilité sous  $\mathbf{P}$ , elle converge en probabilité sous  $\mathbf{Q}$  vers la même limite.

2. Les notations et les hypothèses sont celles du théorème 2.2. Soit  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté tel que  $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$   $\mathbf{P}$ -p.s.. L'intégrale stochastique de  $(H_t)$  par rapport à  $B_t$  est bien définie sous la probabilité  $\mathbf{P}$ . On pose

$$X_t = \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t H_s \theta_s ds.$$

Puisque  $\mathbf{P}^{(L)}$  et  $\mathbf{P}$  sont équivalentes, on a  $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$   $\mathbf{P}^{(L)}$ -p.s. et on peut donc définir, sous  $\mathbf{P}^{(L)}$ , le processus

$$Y_t = \int_0^t H_s dW_s.$$

On demande de montrer que les processus  $X$  et  $Y$  sont égaux. Pour cela, on traitera d'abord le cas des processus élémentaires et on utilisera le fait que si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus adapté vérifiant  $\int_0^T H_s^2 ds < \infty$  p.s., il existe une suite  $(H^n)$  de processus élémentaires telle que  $\int_0^T (H_s - H_s^n)^2 ds$  converge vers 0 en probabilité.

**Exercice 26** Soit  $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$  un mouvement brownien standard défini sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$ . On note  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq 1}$  sa filtration naturelle et on suppose donnée une variable aléatoire  $\tau$  de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , indépendante de  $\mathcal{F}_1$ . Pour  $t \in [0, 1]$ , on note  $\mathcal{G}_t$  la tribu engendrée par  $\mathcal{F}_t$  et la variable aléatoire  $\tau \wedge t$ .

1. Montrer que  $(\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq 1}$  est une filtration et que  $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$  est un mouvement brownien par rapport à  $(\mathcal{G}_t)$ .
2. Pour  $t \in [0, 1]$ , on pose  $M_t = \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{\tau > 1\}} | \mathcal{G}_t \right)$ . Montrer que :

$$M_t = e^{-\lambda(1-t)} \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \quad \text{p.s. .}$$

On pourra utiliser le fait suivant : si  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont deux sous-tribus et  $X$  une variable aléatoire positive telle que la tribu engendrée par  $\mathcal{B}_2$  et  $X$  soit indépendante de la tribu  $\mathcal{B}_1$ , alors  $\mathbf{E}(X | \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2) = \mathbf{E}(X | \mathcal{B}_2)$ , où  $\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$  désigne la tribu engendrée par  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ .

3. Montrer qu'il n'existe pas de processus à trajectoires continues  $(X_t)$  tel que pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$\mathbf{P}(M_t = X_t) = 1,$$

(remarquer que l'on aurait nécessairement  $\mathbf{P}(\forall t \in [0, 1] M_t = X_t) = 1$ ). En déduire que la martingale  $(M_t)$  ne peut pas se représenter comme une intégrale stochastique par rapport à  $(B_t)$ .

**Exercice 27** On utilisera librement les résultats de l'exercice 18 du chapitre 3. Soit  $(W_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien.

1. Démontrer que si  $\mu \leq \lambda$  et si  $N(d) = \int_{-\infty}^d \exp(-x^2/2) (dx / (\sqrt{2\pi}))$  :

$$\mathbf{E} \left( e^{\alpha W_T} \mathbf{1}_{\left\{ W_T \leq \mu, \sup_{s \leq T} W_s \geq \lambda \right\}} \right) = e^{\frac{\alpha^2 T}{2} + 2\alpha\lambda} N \left( \frac{\mu - 2\lambda - \alpha T}{\sqrt{T}} \right).$$

En déduire que si  $\lambda \leq \mu$  :

$$\mathbf{E} \left( e^{\alpha W_T} \mathbf{1}_{\left\{ W_T \geq \mu, \inf_{s \leq T} W_s \leq \lambda \right\}} \right) = e^{\frac{\alpha^2 T}{2} + 2\alpha\lambda} N \left( \frac{2\lambda - \mu + \alpha T}{\sqrt{T}} \right).$$

2. Soit  $H \leq K$ , on cherche à trouver une expression explicite pour :

$$C = \mathbf{E} \left( e^{-rT} (X_T - K)_+ \mathbf{1}_{\left\{ \inf_{s \leq T} X_s \geq H \right\}} \right),$$

où  $X_t = x e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$ . Donner une interprétation financière de cette valeur et expliciter la probabilité  $\tilde{\mathbf{P}}$  qui fait de  $\tilde{W}_t = \frac{1}{\sigma} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + W_t$  un mouvement brownien standard.

3. Ecrire  $C$  sous la forme d'une espérance sous  $\tilde{\mathbf{P}}$  d'une variable aléatoire fonction uniquement de  $\tilde{W}_T$  et  $\sup_{0 \leq s \leq T} \tilde{W}_s$ .

4. En déduire une formule explicite pour C.

**Problème 1 Modèle de Black-Scholes avec paramètres dépendant du temps**

On reprend le modèle de Black-Scholes, en supposant que les prix des actifs vérifient les équations suivantes, avec les notations du cours :

$$\begin{cases} dS_t^0 = r(t)S_t^0 dt \\ dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dB_t) \end{cases}$$

où  $r(t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $\sigma(t)$  sont des fonctions *déterministes* du temps, continues sur  $[0, T]$ . On suppose, de plus,  $\inf_{t \in [0, T]} \sigma(t) > 0$

1. Montrer que :

$$S_t = S_0 \exp \left( \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right)$$

On pourra considérer le processus :

$$Z_t = S_t \exp - \left( \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right)$$

2. (a) Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles, gaussiennes, centrées, convergant en moyenne quadratique vers  $X$ . Montrer que  $X$  est gaussienne.  
 (b) Montrer, en approchant  $\sigma$  par des fonctions en escalier, que  $\int_0^t \sigma(s) dB_s$  est une gaussienne et calculer sa variance.
3. Montrer qu'il existe une probabilité  $\mathbf{P}^*$  équivalente à  $\mathbf{P}$ , sous laquelle le prix actualisé de l'action est une martingale et donner sa densité par rapport à  $\mathbf{P}$
4. Dans la suite, on se propose d'évaluer et de couvrir un call d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  sur une action.  
 (a) Soit  $(H_t^0, H_t^1)$  une stratégie autofinancée, de valeur  $V_t$  à l'instant  $t$ . Montrer que si  $(V_t/S_t^0)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$  avec, de plus,  $V_T = (S_T - K)_+$ , alors :

$$\forall t \in [0, T] \quad V_t = F(t, S_t)$$

où  $F$  est la fonction définie par :

$$F(t, x) = \mathbf{E}^* \left( x \exp \left( \int_t^T \sigma(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma^2(s) ds \right) - K e^{-\int_t^T r(s) ds} \right)_+$$

où  $(W_t)$  est, sous  $\mathbf{P}^*$ , un mouvement brownien standard.

- (b) expliciter la fonction  $F$  et faire le lien avec la formule de Black-Scholes.  
 (c) Construire une stratégie de couverture du call ( expliciter  $H_t^0$  et  $H_t^1$  et vérifier la condition d'autofinancement).

**Problème 2 Modèle de Garman-Kohlhagen**

Le modèle de Garman-Kohlhagen est le modèle le plus couramment utilisé pour l'évaluation et la couverture des options de change. Il est directement inspiré du modèle de Black-Scholes. Pour fixer les idées, nous nous intéresserons à des options "dollar contre franc". Par exemple,

un *call* européen, d'échéance  $T$ , sur un dollar au cours d'exercice  $K$ , est le droit d'acheter, à la date  $T$ , un dollar pour  $K$  francs.

Nous noterons  $S_t$  le cours du dollar à l'instant  $t$ , c'est-à-dire le nombre de francs nécessaires à l'achat d'un dollar. L'évolution de  $S_t$  au cours du temps est modélisée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

où  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  est un mouvement brownien standard sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  des nombres réels, avec  $\sigma > 0$ . On notera  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$  la filtration engendrée par  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  et on considèrera que  $\mathcal{F}_t$  représente l'ensemble des informations disponibles à la date  $t$ .

### Partie I

1. Expliciter  $S_t$  en fonction de  $S_0$ ,  $t$  et  $W_t$ . Calculer l'espérance de  $S_t$ .
2. Montrer que si  $\mu > 0$ , le processus  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est une sous-martingale.
3. Soit  $U_t = 1/S_t$  le taux de conversion des francs en dollars. Montrer que  $U_t$  vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dU_t}{U_t} = (\sigma^2 - \mu) dt - \sigma dW_t$$

En déduire que si  $0 < \mu < \sigma^2$ , les processus  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  et  $(U_t)_{t \in [0, T]}$  sont, l'un et l'autre, des sous-martingales. En quoi cela peut-il sembler paradoxal ?

**Partie II** On se propose d'évaluer et de couvrir un *call* européen, d'échéance  $T$ , sur un dollar, au cours d'exercice  $K$ , par une démarche analogue à celle du modèle de Black-Scholes. Le vendeur de l'option, à partir de la richesse initiale que représente la prime, va construire une stratégie, définissant à chaque instant  $t$  un portefeuille contenant  $H_t^0$  francs et  $H_t$  dollars, de façon à produire, à la date  $T$ , une richesse égale (en francs) à  $(S_T - K)_+$ .

A une date  $t$ , la valeur, en francs, d'un portefeuille contenant  $H_t^0$  francs et  $H_t$  dollars est évidemment

$$V_t = H_t^0 + H_t S_t \quad (4.16)$$

Nous supposons que les francs sont placés (ou empruntés) au taux  $r_0$  (taux *domestique*) et les dollars au taux  $r_1$  (taux *étranger*). Une stratégie autofinancée sera donc définie par un processus  $((H_t^0, H_t))_{t \in [0, T]}$  adapté, tel que

$$dV_t = r_0 H_t^0 dt + r_1 H_t S_t dt + H_t dS_t \quad (4.17)$$

où  $V_t$  est défini par l'équation 4.16.

1. Quelles conditions d'intégrabilité doit-on imposer aux processus  $(H_t^0)$  et  $(H_t)$  pour que l'égalité différentielle 4.17 ait un sens ?
2. Soit  $\tilde{V}_t = e^{-r_0 t} V_t$  la valeur actualisée du portefeuille (autofinancé)  $(H_t^0, H_t)$ . Démontrer l'égalité :

$$d\tilde{V}_t = H_t e^{-r_0 t} S_t (\mu + r_1 - r_0) dt + H_t e^{-r_0 t} S_t \sigma dW_t$$

3. (a) Montrer qu'il existe une probabilité  $\bar{\mathbf{P}}$ , équivalente à  $\mathbf{P}$ , sous laquelle le processus

$$\bar{W}_t = \frac{\mu + r_1 - r_0}{\sigma} t + W_t$$

est un mouvement brownien standard.

- (b) On dira d'une stratégie autofinancée qu'elle est *admissible* si sa valeur actualisée  $\tilde{V}_t$  est, pour tout  $t$ , positive et si  $\sup_{t \in [0, T]} (\tilde{V}_t)$  est de carré intégrable sous  $\bar{\mathbf{P}}$ . Montrer que la valeur actualisée d'une stratégie admissible est une martingale sous  $\bar{\mathbf{P}}$ .
4. Montrer que si une stratégie admissible simule le call, c'est-à-dire a pour valeur à l'instant  $T$ ,  $V_T = (S_T - K)_+$ , alors pour tout  $t \leq T$  la valeur de la stratégie à l'instant  $t$  est donnée par :

$$V_t = F(t, S_t)$$

où <sup>1</sup>

$$F(t, x) = \bar{\mathbf{E}} \left( x e^{-(r_1 + (\sigma^2/2))(T-t) + \sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t)} - K e^{-r_0(T-t)} \right)_+$$

5. Montrer (par un calcul détaillé) que

$$F(t, x) = e^{-r_1(T-t)} x N(d_1) - K e^{-r_0(T-t)} N(d_2)$$

où  $N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et :

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (r_0 - r_1 + (\sigma^2/2))(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(x/K) + (r_0 - r_1 - (\sigma^2/2))(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

6. On demande maintenant de montrer que l'option est effectivement simulable.

- (a) On pose  $\bar{S}_t = e^{(r_1 - r_0)t} S_t$ . Montrer l'égalité :

$$d\bar{S}_t = \sigma \bar{S}_t d\bar{W}_t$$

- (b) Soit  $\bar{F}$  la fonction définie par  $\bar{F}(t, x) = e^{-r_0 t} F(t, x e^{(r_0 - r_1)t})$  ( $F$  désignant la fonction définie dans la question 4). On pose  $C_t = F(t, S_t)$  et  $\tilde{C}_t = e^{-r_0 t} C_t = \bar{F}(t, \bar{S}_t)$ . Montrer l'égalité :

$$d\tilde{C}_t = \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) \sigma e^{-r_0 t} S_t d\bar{W}_t$$

- (c) En déduire que le call est simulable et expliciter le portefeuille  $((H_t^0, H_t))$  simulant cette option.

7. Ecrire une relation de parité call-put, analogue à celle vue en cours pour les actions et donner un exemple d'arbitrage possible lorsque cette relation n'est pas vérifiée.

### Problème 3 Options d'échange

On considère un marché financier dans lequel il y a deux actifs risqués de prix respectifs  $S_t^1$  et  $S_t^2$  à l'instant  $t$  et un actif sans risque de prix  $S_t^0 = e^{rt}$  à l'instant  $t$ . L'évolution des prix  $S_t^1$  et  $S_t^2$  au cours du temps est modélisée par les équations différentielles stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} dS_t^1 &= S_t^1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dB_t^1) \\ dS_t^2 &= S_t^2 (\mu_2 dt + \sigma_2 dB_t^2) \end{cases}$$

où  $(B_t^1)_{t \in [0, T]}$  et  $(B_t^2)_{t \in [0, T]}$  sont deux mouvements browniens standards indépendants définis sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ,  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1$  et  $\sigma_2$  des nombres réels, avec  $\sigma_1 > 0$  et  $\sigma_2 > 0$ . On notera  $\mathcal{F}_t$  la tribu engendrée par les variables aléatoires  $B_s^1$  et  $B_s^2$  pour  $s \leq t$ . Les processus  $(B_t^1)_{t \in [0, T]}$  et  $(B_t^2)_{t \in [0, T]}$  sont alors des  $(\mathcal{F}_t)$ -mouvements browniens et, pour  $t \geq s$ , le vecteur  $(B_t^1 - B_s^1, B_t^2 - B_s^2)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$ .

Nous allons étudier l'évaluation et la couverture d'une option donnant le droit d'échanger, à la date  $T$ , un des actifs risqués contre l'autre.

<sup>1</sup>Le symbole  $\bar{\mathbf{E}}$  désigne l'espérance sous la probabilité  $\bar{\mathbf{P}}$ .

**Partie I**

1. On pose  $\theta_1 = (\mu_1 - r)/\sigma_1$  et  $\theta_2 = (\mu_2 - r)/\sigma_2$ . Montrer que le processus défini par :

$$M_t = e^{-\theta_1 B_t^1 - \theta_2 B_t^2 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2)t},$$

est une martingale par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ .

2. Soit  $\tilde{\mathbf{P}}$  la probabilité de densité  $M_T$  par rapport à  $\mathbf{P}$ . On introduit les processus  $W^1$  et  $W^2$  définis par  $W_t^1 = B_t^1 + \theta_1 t$  et  $W_t^2 = B_t^2 + \theta_2 t$ . Calculer, sous la probabilité  $\tilde{\mathbf{P}}$ , la fonction caractéristique du couple  $(W_t^1, W_t^2)$ . En déduire que, pour tout  $t \in [0, T]$ , les variables aléatoires  $W_t^1$  et  $W_t^2$  sont, sous  $\tilde{\mathbf{P}}$  des gaussiennes centrées indépendantes, de variance  $t$ .

Pour la suite, on pourra admettre que, sous la probabilité  $\tilde{\mathbf{P}}$ , les processus  $(W_t^1)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(W_t^2)_{0 \leq t \leq T}$  sont des  $(\mathcal{F}_t)$ -mouvements browniens standards indépendants et que, pour  $t \geq s$ , le vecteur  $(W_t^1 - W_s^1, W_t^2 - W_s^2)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$ .

3. Exprimer  $\tilde{S}_t^1$  et  $\tilde{S}_t^2$  en fonction de  $S_0^1, S_0^2, W_t^1$  et  $W_t^2$  et montrer que, sous  $\tilde{\mathbf{P}}$ , les prix actualisés  $\tilde{S}_t^1 = e^{-rt} S_t^1$  et  $\tilde{S}_t^2 = e^{-rt} S_t^2$  sont des martingales.

**Partie II** On se propose d'évaluer et de couvrir un option européenne, d'échéance  $T$ , donnant à son détenteur le droit d'échanger une unité de l'actif 2 contre une unité de l'actif 1. Pour cela, on reprend la démarche du modèle de Black-Scholes. Le vendeur de l'option, à partir de la richesse initiale que représente la prime, va construire une stratégie, définissant à chaque instant  $t$  un portefeuille contenant  $H_t^0$  unités d'actif sans risque, et  $H_t^1$  et  $H_t^2$  unités des actifs 1 et 2 respectivement, de façon à produire, à la date  $T$ , une richesse égale à  $(S_T^1 - S_T^2)_+$ . Une stratégie de gestion sera définie par les trois processus adaptés  $H^0, H^1$  et  $H^2$ .

1. Définir de façon précise les stratégies autofinancées et montrer que si  $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$  est la valeur actualisée d'une stratégie autofinancée, on a

$$d\tilde{V}_t = H_t^1 e^{-rt} S_t^1 \sigma_1 dW_t^1 + H_t^2 e^{-rt} S_t^2 \sigma_2 dW_t^2.$$

2. Montrer que si les processus  $(H_t^1)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(H_t^2)_{0 \leq t \leq T}$  d'une stratégie autofinancée sont uniformément bornés (ce qui signifie :  $\exists C > 0, \forall (t, \omega) \in [0, T] \times \Omega, |H_t^i(\omega)| \leq C$ , pour  $i = 1, 2$ ), alors la valeur actualisée de la stratégie est une martingale sous  $\tilde{\mathbf{P}}$ .
3. Montrer que si une stratégie autofinancée vérifie les hypothèses de la question précédente et a pour valeur terminale  $V_T = (S_T^1 - S_T^2)_+$ , sa valeur à tout instant  $t < T$  est donnée par

$$V_t = F(t, S_t^1, S_t^2), \quad (4.18)$$

où la fonction  $F$  est définie par

$$F(t, x_1, x_2) = \tilde{\mathbf{E}} \left( x_1 e^{\sigma_1 (W_T^1 - W_t^1) - \frac{\sigma_1^2}{2}(T-t)} - x_2 e^{\sigma_2 (W_T^2 - W_t^2) - \frac{\sigma_2^2}{2}(T-t)} \right)_+, \quad (4.19)$$

le symbole  $\tilde{\mathbf{E}}$  désignant l'espérance sous  $\tilde{\mathbf{P}}$ . L'existence d'une stratégie ayant cette valeur sera démontrée dans ce qui suit. On considèrera dans la suite que la valeur de l'option  $(S_T^1 - S_T^2)_+$  à l'instant  $t$  est donnée par  $F(t, S_t^1, S_t^2)$ .

4. Montrer une relation de parité entre la valeur de l'option  $(S_T^1 - S_T^2)_+$  et celle de l'option symétrique  $(S_T^2 - S_T^1)_+$ , analogue à la relation de parité call-put vue en cours et donner un exemple d'arbitrage possible lorsque cette relation n'est pas vérifiée.

**Partie III** Le but de cette partie est d'explicitier la fonction  $F$  définie par (4.19) et de construire une stratégie simulant l'option.

1. Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes et soit  $\lambda$  un nombre réel.

(a) Montrer que sous la probabilité  $\mathbf{P}^{(\lambda)}$ , de densité par rapport à  $\mathbf{P}$  donnée par :

$$\frac{d\mathbf{P}^{(\lambda)}}{d\mathbf{P}} = e^{\lambda g_1 - \frac{\lambda^2}{2}},$$

les variables aléatoires  $g_1 - \lambda$  et  $g_2$  sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes.

(b) En déduire que pour tous réels  $y_1, y_2, \lambda_1$  et  $\lambda_2$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( e^{y_1 + \lambda_1 g_1} - e^{y_2 + \lambda_2 g_2} \right)_+ &= \\ &= e^{y_1 + \frac{\lambda_1^2}{2}} \mathbf{N} \left( \frac{y_1 - y_2 + \lambda_1^2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \right) - e^{y_2 + \frac{\lambda_2^2}{2}} \mathbf{N} \left( \frac{y_1 - y_2 - \lambda_2^2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} \right), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{N}$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2. Déduire de la question précédente une expression de  $F$  à partir de la fonction  $\mathbf{N}$ .
3. On pose  $\tilde{C}_t = e^{-rt}F(t, S_t^1, S_t^2)$ . En remarquant que :

$$\tilde{C}_t = F(t, \tilde{S}_t^1, \tilde{S}_t^2) = \tilde{\mathbf{E}} \left( e^{-rT} (S_T^1 - S_T^2)_+ | \mathcal{F}_t \right),$$

montrer l'égalité :

$$d\tilde{C}_t = \frac{\partial F}{\partial x_1}(t, \tilde{S}_t^1, \tilde{S}_t^2) \sigma_1 e^{-rt} S_t^1 dW_t^1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(t, \tilde{S}_t^1, \tilde{S}_t^2) \sigma_2 e^{-rt} S_t^2 dW_t^2.$$

On pourra utiliser le fait que si  $(X_t)$  est un processus d'Itô de la forme  $X_t = X_0 + \int_0^t J_s^1 dW_s^1 + \int_0^t J_s^2 dW_s^2 + \int_0^t K_s ds$  et est une martingale sous  $\tilde{\mathbf{P}}$ , alors  $K_t = 0$ ,  $dt d\tilde{\mathbf{P}}$ -presque partout.

4. Construire une stratégie de couverture de l'option d'échange.

#### Problème 4 Etude de stratégies avec consommation

On considère un marché financier dans lequel il y a un actif sans risque, de prix  $S_t^0 = e^{rt}$  à l'instant  $t$  (avec  $r \geq 0$ ) et un actif risqué, de prix  $S_t$  à l'instant  $t$ . Le modèle est étudié sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  ( $0 \leq T < \infty$ ). Dans ce qui suit,  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus stochastique défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . On suppose que  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$  et que le processus  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est adapté à cette filtration.

Nous allons étudier des stratégies dans lesquelles la consommation est autorisée. L'évolution de  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est régie par le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),$$

avec  $\mu \in \mathbf{R}$  et  $\sigma > 0$ . On note  $\mathbf{P}^*$  la probabilité de densité  $e^{-\theta B_T - \frac{\theta^2 T}{2}}$  par rapport à  $\mathbf{P}$ , avec  $\theta = (\mu - r)/\sigma$ . Sous  $\mathbf{P}^*$ , le processus  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ , défini par  $W_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t$ , est un mouvement brownien standard.

Une stratégie de consommation est définie par trois processus stochastiques :

$$(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}, (H_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ et } (c(t))_{0 \leq t \leq T}.$$

$H_t^0$  et  $H_t$  représentent respectivement les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué détenues à l'instant  $t$  et  $c(t)$  représente le taux de consommation à l'instant  $t$ . On dira qu'une telle stratégie est *admissible* si les conditions suivantes sont réalisées :

i) Les processus  $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(c(t))_{0 \leq t \leq T}$  sont adaptés et vérifient

$$\int_0^T (|H_t^0| + H_t^2 + |c(t)|) dt < \infty, \quad \text{p.s.}$$

ii) Pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u - \int_0^t c(u) du, \quad \text{p.s.}$$

iii) Pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $c(t) \geq 0$ , p.s.

iv) Pour tout  $t \in [0, T]$ , la variables aléatoire  $H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$  est positive et :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left( H_t^0 S_t^0 + H_t S_t + \int_0^t c(s) ds \right)$$

est de carré intégrable sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ .

### Partie I

1. Soient  $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(c(t))_{0 \leq t \leq T}$ , trois processus adaptés vérifiant la condition i) ci-dessus. On pose  $V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$  et  $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$ . Montrer qu'alors la condition ii) est vérifiée si et seulement si on a, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u - \int_0^t \tilde{c}(u) du, \quad \text{p.s.}$$

avec  $\tilde{S}_u = e^{-ru} S_u$  et  $\tilde{c}(u) = e^{-ru} c(u)$ .

2. On suppose que les conditions i) à iv) sont vérifiées et on note encore  $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t = e^{-rt} (H_t^0 S_t^0 + H_t S_t)$ . Montrer que le processus  $(\tilde{V}_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une surmartingale sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ .

3. Soit  $(c(t))_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté, à valeurs positives tel que  $\mathbf{E}^* \left( \int_0^T c(t) dt \right)^2 < \infty$  et soit  $x > 0$ . On dira que  $(c(t))_{0 \leq t \leq T}$  est un processus de consommation *finançable* à partir de la richesse initiale  $x$  s'il existe des processus  $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  tels que les conditions i) à iv) soient vérifiées, avec, de plus  $V_0 = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 = x$ .

(a) Montrer que si le processus  $(c(t))_{0 \leq t \leq T}$  est finançable à partir de la richesse initiale  $x$ , alors  $\mathbf{E}^* \left( \int_0^T e^{-rt} c(t) dt \right) \leq x$ .

(b) Soit  $(c(t))_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté, à valeurs positives tel que :

$$\mathbf{E}^* \left( \int_0^T c(t) dt \right)^2 < \infty \text{ et } \mathbf{E}^* \left( \int_0^T e^{-rt} c(t) dt \right) \leq x.$$

Montrer que  $(c(t))_{0 \leq t \leq T}$  est un processus de consommation finançable à partir de la richesse initiale  $x$ . On introduira la martingale  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  définie par  $M_t = \mathbf{E}^* \left( x + \int_0^T e^{-rs} c(s) ds | \mathcal{F}_t \right)$  et on lui appliquera le théorème de représentation des martingales.



- (c) Un investisseur disposant d'une richesse initiale  $x$  souhaite consommer, une richesse correspondant à la vente de  $\rho$  actifs risqués par unité de temps, à chaque instant où  $S_t$  dépasse un certain niveau  $K$ . (ce qui correspond à  $c(t) = \rho S_t \mathbf{1}_{\{S_t > K\}}$ ). A quelle condition sur  $\rho$  et  $x$  cette consommation est-elle finançable ?

**Partie II** On suppose, maintenant, que la volatilité est stochastique, c'est-à-dire que le processus  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est solution d'une équation différentielle stochastique du type suivant :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma(t) dB_t), \quad (4.20)$$

où  $\mu \in \mathbf{R}$  et  $(\sigma(t))_{0 \leq t \leq T}$  est un processus adapté, vérifiant

$$\forall t \in [0, T] \quad \sigma_1 \leq \sigma(t) \leq \sigma_2,$$

avec des constantes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  telles que  $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ . On considère un call européen d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  sur une unité d'actif risqué. On sait que si le processus  $(\sigma(t))_{0 \leq t \leq T}$  est constant (avec  $\sigma(t) = \sigma$  pour tout  $t$ ) le prix du call à l'instant  $t$  est  $C(t, S_t)$ , où la fonction  $C(t, x)$  vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial C}{\partial x}(t, x) - rC(t, x) = 0 & \text{sur } [0, T[ \times ]0, \infty[ \\ C(T, x) = (x - K)_+ \end{cases}$$

On notera  $C_1$  la fonction  $C$  correspondant à  $\sigma = \sigma_1$  et  $C_2$  la fonction  $C$  correspondant à  $\sigma = \sigma_2$ . Nous allons montrer que le prix du call à l'instant 0 dans le modèle à volatilité stochastique ci-dessus est compris entre  $C_1(0, S_0)$  et  $C_2(0, S_0)$ .

On rappelle que si  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus adapté borné, le processus  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par  $L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$  est une martingale.

1. Montrer (en utilisant les formules de prix sous forme d'espérance) que les fonctions  $x \mapsto C_1(t, x)$  et  $x \mapsto C_2(t, x)$  sont convexes.
2. Montrer que la solution de l'équation (4.20) est donnée par

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds}.$$

3. Déterminer une probabilité  $\mathbf{P}^*$  équivalente à  $\mathbf{P}$  sous laquelle le processus défini par  $W_t = B_t + \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma(s)} ds$  soit un mouvement brownien standard.
4. Expliquer pourquoi le prix à l'instant 0 du call est donné par :

$$C_0 = \mathbf{E}^* \left( e^{-rT} (S_T - K)_+ \right).$$

5. On pose  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ . Montrer que  $\mathbf{E}^* \left( \tilde{S}_t^2 \right) \leq S_0^2 e^{\sigma_2^2 t}$ .
6. Montrer que le processus défini par :

$$M_t = \int_0^t e^{-ru} \frac{\partial C_1}{\partial x}(u, S_u) \sigma(u) S_u dW_u$$

est une martingale sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ .

7. En utilisant la formule d'Itô et les questions 1 et 6, montrer que  $e^{-rt} C_1(t, S_t)$  est une sousmartingale sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ . En déduire que  $C_1(0, S_0) \leq C_0$ .

8. Démontrer l'inégalité  $C_0 \leq C_2(0, S_0)$ .

### Problème 5 Option sur option

On considère un marché financier dans lequel il y a un actif sans risque, de prix  $S_t^0 = e^{rt}$  à l'instant  $t$  (avec  $r \geq 0$ ) et un actif risqué, de prix  $S_t$  à l'instant  $t$ . Le modèle est étudié sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  ( $0 \leq T < \infty$ ). Soit  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus stochastique défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . On suppose que  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$  et que l'évolution du processus  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est régie par le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),$$

avec  $\mu \in \mathbf{R}$  et  $\sigma > 0$ .

Nous allons étudier un exemple d'option sur option. On considère une option d'achat d'échéance  $T_1 \in ]0, T[$  et de prix d'exercice  $K_1$  sur un call d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  sur une unité d'actif risqué. La valeur de cette option à l'échéance  $T_1$  est donc :

$$h = (C(T_1, S_{T_1}) - K_1)_+,$$

où  $C(t, x)$  est le prix du call sous-jacent (donné par la formule de Black-Scholes).

1. (a) Dessiner la représentation graphique de la fonction  $x \mapsto C(T_1, x)$ . On montrera que la droite  $y = x - Ke^{-r(T-T_1)}$  est une asymptote (utiliser la formule de parité call-put).  
(b) Montrer que l'équation  $C(T_1, x) = K_1$  admet une unique solution  $x_1$ .
2. Montrer que la valeur, à un instant  $t < T_1$ , de l'option définie par  $h$  est égale à  $G(T_1 - t, S_t)$ , la fonction  $G$  étant définie par

$$G(\theta, x) = \mathbf{E} \left[ e^{-r\theta} \left( C \left( T_1, xe^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma\sqrt{\theta}g} \right) - K_1 \right)^+ \right],$$

où  $g$  est une gaussienne centrée réduite.

3. (a) Montrer que la fonction  $x \mapsto G(\theta, x)$  est croissante, convexe.  
(b) On cherche maintenant à expliciter  $G$ . On note  $N$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Montrer l'égalité

$$G(\theta, x) = \mathbf{E} \left[ e^{-r\theta} C \left( T_1, xe^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma\sqrt{\theta}g} \right) \mathbf{1}_{\{g > -d\}} \right] - K_1 e^{-r\theta} N(d),$$

où

$$d = \frac{\log(x/x_1) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}.$$

- (c) Montrer que, si  $g_1$  est une gaussienne centrée réduite indépendante de  $g$ , on a, en posant  $\theta_1 = T - T_1$ ,

$$G(\theta, x) + K_1 e^{-r\theta} N(d) = \mathbf{E} \left[ \left( xe^{\sigma(\sqrt{\theta}g + \sqrt{\theta_1}g_1) - \frac{\sigma^2}{2}(\theta + \theta_1)} - Ke^{-r(\theta + \theta_1)} \right) \mathbf{1}_A \right],$$

où l'événement  $A$  est défini par

$$A = \left\{ \sigma(\sqrt{\theta}g + \sqrt{\theta_1}g_1) > - \left( \log(x/K_1) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\theta + \theta_1) \right) \text{ et } g > -d \right\}.$$

- (d) Dédurre de ce qui précède une expression de  $G(\theta, x)$  à l'aide de  $N$  et de la fonction  $N_2$  définie par

$$N_2(y, y_1, \rho) = \mathbf{P}(g < y, g + \rho g_1 < y_1) \quad \text{pour } y, y_1, \rho \in \mathbf{R}.$$

4. Montrer que l'on peut couvrir parfaitement l'option sur option étudiée à l'aide d'un portefeuille ne contenant que des actifs sans risque et des calls sur l'actif risqué sous-jacent.

### Problème 6 Comportement du prix critique près de l'échéance

On considère un put américain d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  sur une unité d'actif risqué. Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à un instant  $t < T$  de cette option est égal à  $P(t, S_t)$ , la fonction  $P$  étant définie par

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbf{E}^* \left( K e^{-r\tau} - x e^{\sigma W_\tau - \frac{\sigma^2}{2}\tau} \right)^+,$$

où  $\mathcal{T}_{0, T-t}$  est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans  $[0, T-t]$  et  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est, sous  $\mathbf{P}^*$ , un mouvement brownien standard. On suppose  $r > 0$ . Pour  $t \in [0, T[$ , on note  $s(t)$  le prix critique à l'instant  $t$ , défini par

$$s(t) = \inf\{x > 0 \mid P(t, x) > K - x\}.$$

On rappelle que  $\lim_{t \rightarrow T} s(t) = K$ .

1. Soit  $P_e$  la fonction donnant le prix du put *européen* d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$  :

$$P_e(t, x) = \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} K - x e^{\sigma \sqrt{T-t} g - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \right)^+,$$

où  $g$  est une gaussienne centrée réduite. Montrer que, si  $t \in [0, T[$ , l'équation  $P_e(t, x) = K - x$  a une unique solution dans  $]0, K[$ . On note  $s_e(t)$  cette solution.

2. Montrer que  $s(t) \leq s_e(t)$ , pour tout  $t \in [0, T[$ .  
3. Montrer que

$$\liminf_{t \rightarrow T} \frac{K - s_e(t)}{\sqrt{T-t}} \geq \mathbf{E} \left( \liminf_{t \rightarrow T} \frac{K - s_e(t)}{\sqrt{T-t}} - \sigma K g \right)^+.$$

On utilisera le lemme de Fatou : pour toute suite  $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de variables aléatoires positives,  $\mathbf{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(X_n)$ .

4. (a) Montrer que, pour tout nombre réel  $\eta$ ,

$$\mathbf{E}(\eta - K\sigma g)^+ > \eta.$$

- (b) En déduire que

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{K - s_e(t)}{\sqrt{T-t}} = \lim_{t \rightarrow T} \frac{K - s(t)}{\sqrt{T-t}} = +\infty.$$

### Problème 7 Option sur moyenne

On considère un marché financier dans lequel il y a un actif sans risque, de prix  $S_t^0 = e^{rt}$  à l'instant  $t$  (avec  $r \geq 0$ ) et un actif risqué, de prix  $S_t$  à l'instant  $t$ . Le modèle est étudié sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  ( $0 \leq T < \infty$ ). Le processus stochastique  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ . On suppose que  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$  et que l'évolution du processus  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est régie par le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),$$

avec  $\mu \in \mathbf{R}$  et  $\sigma > 0$ . On notera  $\mathbf{P}^*$  la probabilité de densité  $e^{-\theta B_T - \frac{\theta^2 T}{2}}$  par rapport à  $\mathbf{P}$ , avec  $\theta = (\mu - r)/\sigma$ . Sous  $\mathbf{P}^*$ , le processus  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ , défini par  $W_t = \frac{\mu - r}{\sigma}t + B_t$ , est un mouvement brownien standard.

Nous allons étudier une option dont la valeur à la date d'échéance  $T$  est donnée par

$$h = \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^+,$$

où  $K$  est une constante positive. Une telle option est appelée option asiatique.

### Partie I

1. Rappeler brièvement pourquoi la valeur à un instant  $t$  ( $t \leq T$ ) de l'option asiatique ci-dessus est donnée par

$$V_t = \mathbf{E}^* \left[ e^{-r(T-t)} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

2. Montrer que sur l'événement  $\left\{ \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \geq K \right\}$ , on a

$$V_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{T} \int_0^t S_u du + \frac{1 - e^{-r(T-t)}}{rT} S_t - K e^{-r(T-t)}.$$

3. On pose  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ , pour  $t \in [0, T]$ .

- (a) Démontrer l'inégalité

$$\mathbf{E}^* \left( \tilde{S}_t - K e^{-rT} \right)^+ \leq \mathbf{E}^* \left[ e^{-rT} (S_T - K)^+ \right].$$

(Conditionner par  $\mathcal{F}_t$ ).

- (b) En déduire que

$$V_0 \leq \mathbf{E}^* \left[ e^{-rT} (S_T - K)^+ \right],$$

c'est-à-dire que la valeur de l'option asiatique à l'instant 0 est plus petite que celle d'un call européen d'échéance  $T$  et de prix d'exercice  $K$ .

- (c) Pour  $t \leq u$ , on note  $C_{t,u}$  la valeur à l'instant  $t$  d'un call européen d'échéance  $u$  et de prix d'exercice  $K$ . Montrer l'inégalité :

$$V_t \leq \frac{e^{-r(T-t)} t}{T} \left( \frac{1}{t} \int_0^t S_u du - K \right)^+ + \frac{1}{T} \int_t^T e^{-r(T-u)} C_{t,u} du.$$

**Partie II** On note  $(\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$  le processus défini par

$$\xi_t = \frac{1}{S_t} \left( \frac{1}{T} \int_0^t S_u du - K \right).$$

1. Montrer que  $(\xi_t)_{0 \leq t \leq T}$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$d\xi_t = \left( \frac{1}{T} + (\sigma^2 - r)\xi_t \right) dt - \sigma \xi_t dW_t.$$

2. (a) Montrer que

$$V_t = e^{-r(T-t)} S_t \mathbf{E}^* \left[ \left( \xi_t + \frac{1}{T} \int_t^T S_u^t du \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

$$\text{avec } S_u^t = \exp \left( (r - \sigma^2/2)(u - t) + \sigma(W_u - W_t) \right).$$

- (b) En déduire que  $V_t = e^{-r(T-t)} S_t F(t, \xi_t)$ , avec

$$F(t, \xi) = \mathbf{E}^* \left( \xi + \frac{1}{T} \int_t^T S_u^t du \right)^+.$$

3. Déterminer une stratégie de couverture parfaite de l'option étudiée. On admettra que la fonction  $F$  introduite précédemment est de classe  $C^2$  sur  $[0, T] \times \mathbf{R}$  et on utilisera la formule d'Itô.

**Partie III** L'objet de cette partie est de proposer une approximation par défaut de  $V_0$  consistant à remplacer la moyenne arithmétique par la moyenne géométrique. On pose ainsi :

$$\hat{V}_0 = e^{-rT} \mathbf{E}^* \left( \exp \left( \frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt \right) - K \right)^+.$$

1. Montrer que  $V_0 \geq \hat{V}_0$ .
2. (a) Montrer que, sous  $\mathbf{P}^*$ , la variable aléatoire  $\int_0^T W_t dt$  est une gaussienne centrée de variance  $\frac{T^3}{3}$ .
- (b) En déduire que

$$\hat{V}_0 = e^{-rT} \mathbf{E} \left( S_0 \exp \left( (r - \sigma^2/2)(T/2) + \sigma \sqrt{T/3} g \right) - K \right)^+,$$

où  $g$  est une gaussienne centrée réduite, et expliciter  $\hat{V}_0$  à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

3. Démontrer l'inégalité :

$$V_0 - \hat{V}_0 \leq S_0 e^{-rT} \left( \frac{e^{rT} - 1}{rT} - \exp \left( (rT/2) - \sigma^2 T/12 \right) \right).$$



# Chapitre 5

## Evaluation des options et équations aux dérivées partielles

Nous avons vu, au chapitre précédent, que l'on pouvait obtenir une formule explicite du prix d'une option européenne, dans le cadre du modèle de Black et Scholes. Lorsque l'on s'intéresse à des modèles plus complexes ou que l'on veut calculer des prix d'options américaines, on ne connaît pas de formule explicite. On a, dans ce cas, le plus souvent recours à des méthodes numériques. L'objectif de ce chapitre est de donner une introduction à ces moyens de calcul.

On commence par établir le lien entre le problème du calcul du prix des options européennes et une équation aux dérivées partielles de type parabolique. Ce lien est fondé sur la notion de générateur infinitésimal d'une diffusion. On montre comment résoudre numériquement le problème parabolique ainsi obtenu.

Le problème du calcul des prix d'options américaines est plus délicat, nous ne l'aborderons pas dans sa généralité, mais uniquement dans le cadre du modèle de Black et Scholes. On montre en particulier le lien naturel entre la notion d'enveloppe de Snell et un système d'inéquations aux dérivées partielles de type parabolique, et l'on indique comment traiter numériquement ce type d'inéquations.

Les méthodes d'analyse numérique employées dans ce chapitre étant classiques, nous n'avons fait que rappeler les résultats qui nous sont utiles sans chercher à les justifier en détail. On trouvera une introduction à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles dans [RT83].

### 1 Calculs de prix d'options européennes pour les modèles de diffusion

Dans le modèle de Black et Scholes, la valeur d'une option européenne est donnée par :

$$V_t = \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t \right)$$

avec  $f(x) = (x - K)_+$  (pour un call) et  $(K - x)_+$  (pour un put) et :

$$S_T = x_0 e^{(r - \sigma^2/2)T + \sigma W_T}$$

Le calcul du prix d'une option européenne est un cas particulier du problème suivant. Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une diffusion à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , solution de :

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \tag{5.1}$$

où  $b$  et  $\sigma$  sont des fonctions à valeurs réelles vérifiant les hypothèses du théorème 5.3 du chapitre 3 et  $r(t, x)$  une fonction continue bornée modélisant le taux d'intérêt sans risque. On cherche à calculer :

$$V_t = \mathbf{E} \left( e^{-\int_t^T r(s, X_s) ds} f(X_T) | \mathcal{F}_t \right).$$

Comme dans le cas du modèle de Black et Scholes  $V_t$  s'écrit :

$$V_t = F(t, X_t)$$

où :

$$F(t, x) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_t^T r(s, X_s^{t,x}) ds} f(X_T^{t,x}) \right),$$

avec  $X_s^{t,x}$  qui est la solution de (5.1) issue de  $x$  à l'instant  $t$ . Intuitivement on a :

$$F(t, x) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_t^T r(s, X_s) ds} f(X_T) | X_t = x \right).$$

Mathématiquement, ce résultat est conséquence du théorème 5.9 du chapitre 3 . Le calcul de  $V_t$  se ramène ainsi au calcul de la fonction  $F(t, x)$ . Cette fonction  $F(t, x)$  peut (sous certaines hypothèses de régularité à préciser) s'exprimer comme la solution unique de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbf{R} & u(T, x) = f(x) \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru \right) (t, x) = 0 & \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R} \end{cases} \quad (5.2)$$

où :

$$(A_t f)(x) = \frac{\sigma^2(t, x)}{2} f''(x) + b(t, x) f'(x).$$

Avant de prouver ce résultat, nous commençons par indiquer pourquoi l'opérateur  $A_t$  intervient de façon naturelle lorsque l'on étudie des solutions d'équations différentielles stochastiques.

## 1.1 Générateur infinitésimal d'une diffusion

Nous supposons que  $b$  et  $\sigma$  ne dépendent pas du temps. On note  $(X_t)_{t \geq 0}$  une solution de :

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \quad (5.3)$$

**Proposition 1.1** Soient  $f$  une fonction de classe  $C^2$  à dérivées bornées et  $A$  l'opérateur différentiel qui à une fonction  $f$  de classe  $C^2$  associe :

$$(Af)(x) = \frac{\sigma^2(x)}{2} f''(x) + b(x) f'(x).$$

Alors, le processus  $M_t = f(X_t) - \int_0^t Af(X_s) ds$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale.

**Démonstration :** La formule d'Itô donne :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma^2(X_s) ds.$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \int_0^t f'(X_s) \sigma(X_s) dW_s \\ &+ \int_0^t \left[ \frac{1}{2} \sigma^2(X_s) f''(X_s) + b(X_s) f'(X_s) \right] ds, \end{aligned}$$

et la proposition résulte du fait que l'intégrale stochastique  $\int_0^t f'(X_s) \sigma(X_s) dW_s$  est une martingale. En effet, si l'on tient compte du théorème 5.3 du chapitre 3 et du fait que  $|\sigma(x)|$  est majoré par  $K(1 + |x|)$ , on obtient :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^t |f'(X_s)|^2 |\sigma(X_s)|^2 ds \right) \leq KT \sup_{x \in \mathbf{R}} |f'(x)|^2 \left( 1 + \mathbf{E} \left( \sup_{s \leq T} |X_s|^2 \right) \right) < +\infty.$$

■



**Remarque 1.2** Si on note  $X_t^x$  la solution de l'équation différentielle stochastique (5.3) telle que  $X_0^x = x$ , on déduit de la proposition 1.1 que :

$$\mathbf{E} (f (X_t^x)) = f(x) + \mathbf{E} \left( \int_0^t Af (X_s^x) ds \right).$$

De plus, comme les dérivées de  $f$  sont bornées par une constante  $K_f$  et que  $|b(x)| + |\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)$  on a :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{s \leq T} |Af(X_s^x)| \right) \leq K_f' \left( 1 + \mathbf{E} \left( \sup_{s \leq T} |X_s^x|^2 \right) \right) < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue ( $x \mapsto Af(x)$  et  $s \mapsto X_s^x$  sont des fonctions continues) pour en déduire que :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{E} (f (X_t^x))|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{E} \left( \frac{1}{t} \int_0^t Af(X_s^x) ds \right) = Af(x).$$

L'opérateur différentiel  $A$  est appelé *le générateur infinitésimal* de la diffusion. Pour des compléments sur le générateur infinitésimal d'une diffusion on pourra consulter [Bou88] chapitre 8.

La proposition 1.1 se généralise au cas "dépendant du temps". On suppose que  $b$  et  $\sigma$  vérifient les hypothèses du théorème 5.3 du chapitre 3 assurant l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle stochastique 5.1.

**Proposition 1.3** Si  $u(t, x)$  est une fonction de classe  $C^{1,2}$  en  $(t, x)$  à dérivée en  $x$  bornée, et  $X_t$  est une solution de (5.1), le processus :

$$M_t = u(t, X_t) - \int_0^t \left( \frac{\partial u}{\partial t} + A_s u \right) (s, X_s) ds$$

est une martingale, où  $A_s$  est l'opérateur (agissant sur la variable  $x$ ) défini par :

$$(A_s u) (x) = \frac{\sigma^2(s, x)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(s, x) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.1 : on utilise, cette fois, la formule d'Itô pour une fonction du temps et d'un processus d'Itô (voir le théorème 4.10 du chapitre 3).

Pour étudier des quantités actualisées, on étend légèrement le résultat précédent.

**Proposition 1.4** Sous les hypothèses de la proposition 1.3, si  $r(t, x)$  est une fonction continue, bornée sur  $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ , le processus :

$$M_t = e^{-\int_0^t r(s, X_s) ds} u(t, X_t) - \int_0^t e^{-\int_0^s r(v, X_v) dv} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + A_s u - ru \right) (s, X_s) ds$$

est une martingale.

**Démonstration :** Cette proposition se démontre en différenciant le produit

$$e^{-\int_0^t r(s, X_s) ds} u(t, X_t),$$



**Théorème 1.7** Soit  $u$  une fonction de classe  $C^{1,2}$  en  $(t, x)$  à dérivée en  $x$  bornée sur  $[0, T] \times \mathbf{R}^n$ , vérifiant :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad u(T, x) = f(x),$$

et

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru \right) (t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^n$$

Alors :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^n \quad u(t, x) = F(t, x) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_t^T r(s, X_s^{t,x}) ds} f(X_T^{t,x}) \right).$$

**Démonstration :** Prouvons l'égalité  $u(t, x) = F(t, x)$  pour  $t = 0$ . Par la proposition 1.5, on sait que le processus :

$$M_t = e^{-\int_0^t r(s, X_s^{0,x}) ds} u(t, X_t^{0,x})$$

est une martingale. En écrivant  $\mathbf{E}(M_0) = \mathbf{E}(M_T)$  on obtient :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^T r(s, X_s^{0,x}) ds} u(T, X_T^{0,x}) \right) \\ &= \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^T r(s, X_s^{0,x}) ds} f(X_T^{0,x}) \right) \end{aligned}$$

puisque  $u(T, x) = f(x)$ . La démonstration est similaire lorsque  $t > 0$ . ■

**Remarque 1.8** Le théorème 1.7 suggère la méthode suivante pour calculer :

$$F(t, x) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_t^T r(s, X_s^{t,x}) ds} f(X_T^{t,x}) \right).$$

$f$  étant donnée, il suffit de résoudre le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathbf{R}^n \\ u(T, x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \quad (5.5)$$

Le problème (5.5) est une équation de type parabolique avec condition *terminale* (la fonction  $u(T, \cdot)$  étant donnée).

Pour que ce problème soit bien posé, il faut se placer dans un espace fonctionnel adéquat (voir [RT83]). Une fois ce cadre défini, il existe des théorèmes d'existence et d'unicité et on pourra affirmer que la solution  $u$  de (5.5) est égale à  $F$  si on peut prouver que cette solution est suffisamment régulière pour que l'on puisse appliquer la proposition 1.4. Ce genre de résultats s'obtient généralement sous une hypothèse d'ellipticité pour l'opérateur  $A_t$ , de la forme :

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbf{R}^n \\ \forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n \quad \sum_{ij} a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq C \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

et des hypothèses de régularité sur  $b$  et  $\sigma$ .

### 1.3 Le cas du modèle de Black et Scholes

On se place sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$  pour laquelle le processus  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard et telle que le prix de l'actif  $S_t$  risqué vérifie :

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma dW_t).$$

L'opérateur  $A_t$  est alors indépendant du temps et vaut :

$$A_t = A^{bs} = \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r x \frac{\partial}{\partial x}.$$

On peut vérifier (par un calcul direct) que le prix du call donné par la formule  $F(t, x) = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})$  avec :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log(x/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-x^2/2} dx, \end{aligned}$$

est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A^{bs}u - ru = 0 & \text{dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ u(T, x) = (x - K)_+, \quad \forall x \in ]0, +\infty[. \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour le put.

L'opérateur  $A^{bs}$  ne vérifie pas la condition d'ellipticité (5.6). On peut, cependant, se ramener à un opérateur elliptique en introduisant le processus  $X_t = \log(S_t)$ , qui est solution de :

$$dX_t = \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t,$$

puisque  $S_t = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)t + \sigma W_t}$ . Le générateur infinitésimal du processus  $X_t$ , s'écrit :

$$A^{bs-\log} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Il est manifestement elliptique ( $\sigma^2 > 0$ ) et, de plus, à coefficients constants. On note :

$$\tilde{A}^{bs-\log} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} - r. \quad (5.7)$$

Le lien entre le problème parabolique associé à  $\tilde{A}^{bs-\log}$  et le calcul du prix d'une option dans le modèle de Black et Scholes s'exprime de la façon suivante. Si l'on cherche à calculer le prix d'une option sur  $f(S_T)$  à l'instant  $t$  et pour un cours  $x$  :  $F(t, x)$  et si  $v$  est une solution régulière de :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \tilde{A}^{bs-\log}v(t, x) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathbf{R} \\ v(T, x) = f(e^x), \quad \forall x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (5.8)$$

alors, on a  $F(t, x) = v(t, \log(x))$ .

## 1.4 Equation aux dérivées partielles sur un ouvert borné et calcul d'espérance

Nous allons supposer, dans tout ce qui suit, que l'actif évolue dans  $\mathbf{R}$  et que  $b(x)$ ,  $\sigma(x)$  et  $r(x)$  ne dépendent pas du temps.  $r(x)$  est le taux d'intérêt sans risque et  $A$  est l'opérateur différentiel :

$$(Af)(x) = \frac{1}{2}\sigma(x)^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x}.$$

On note  $\tilde{A}f(x) = Af(x) - r(x)f(x)$ . L'équation (5.5) s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \tilde{A}u(t, x) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathbf{R} \\ u(T, x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Lorsque l'on se pose le problème (5.9) non plus sur  $\mathbf{R}$  tout entier mais sur  $\mathcal{O} = ]a, b[$ , il faut alors imposer des conditions aux limites en  $a$  et  $b$ . Nous allons nous intéresser plus particulièrement au cas où l'on impose des conditions aux limites nulles (on appelle ce type de condition aux limites condition de Dirichlet). On cherche, alors, à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \tilde{A}u(t, x) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathcal{O} \\ u(t, a) = u(t, b) = 0 \quad \forall t \leq T \\ u(T, x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{O}. \end{cases} \quad (5.10)$$

Une solution régulière de (5.10) peut aussi s'interpréter en terme de diffusion. On note  $X^{t,x}$  la solution de (5.3) issue de  $x$  à l'instant  $t$ .

**Théorème 1.9** Soit  $u$  une fonction de classe  $C^{1,2}$  en  $(t, x)$  à dérivée en  $x$  bornée de l'équation (5.10), alors :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{O} \quad u(t, x) = \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{\forall s \in [t, T], X_s^{t,x} \in \mathcal{O}\}} e^{-\int_t^T r(X_s^{t,x}) ds} f(X_T^{t,x}) \right).$$

**Démonstration :** Nous démontrons le résultat lorsque  $t = 0$ , la démonstration est similaire dans les autres cas. On peut prolonger  $u$  de  $[0, T] \times \mathcal{O}$  à  $[0, T] \times \mathbf{R}$ , en conservant le caractère  $C^{1,2}$  de  $u$ . On continue à noter  $u$  un tel prolongement. Par la proposition 1.4, on sait que le processus :

$$M_t = e^{-\int_0^t r(X_s^{0,x}) ds} u(t, X_t^{0,x}) - \int_0^t e^{-\int_0^s r(X_v^{0,x}) dv} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + Au - ru \right) (s, X_s^{0,x}) ds$$

est une martingale. De plus :

$$\tau^x = \inf \{0 \leq s \leq T, X_s^{0,x} \notin \mathcal{O}\} \quad \text{ou } T \text{ si cet ensemble est vide}$$

est un temps d'arrêt borné, car  $\tau^x = T_a^x \wedge T_b^x \wedge T$  où  $T_l^x = \inf\{0 \leq s \leq T, X_s^{0,x} = l\}$  et les  $T_l^x$  sont des temps d'arrêt (la démonstration est identique à celle de la proposition 3.6 du chapitre 3). En écrivant, le théorème d'arrêt entre 0 et  $\tau^x$ , on obtient  $\mathbf{E}(M_0) = \mathbf{E}(M_{\tau^x})$ , soit en tenant compte du fait que si  $s \in [0, \tau^x]$ ,  $Af(X_s^{0,x}) = 0$  :

$$\begin{aligned} u(0, x) &= \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^{\tau^x} r(s, X_s^{0,x}) ds} u(\tau^x, X_{\tau^x}^{0,x}) \right) \\ &= \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{\forall s \in [t, T], X_s^{t,x} \in \mathcal{O}\}} e^{-\int_0^T r(s, X_s^{0,x}) ds} u(T, X_T^{0,x}) \right) \\ &\quad + \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{\exists s \in [t, T], X_s^{t,x} \notin \mathcal{O}\}} e^{-\int_0^{\tau^x} r(s, X_s^{0,x}) ds} u(\tau^x, X_{\tau^x}^{0,x}) \right). \end{aligned}$$

Mais, d'une part  $f(x) = u(T, x)$  et d'autre part, sur l'événement  $\{\exists s \in [t, T], X_s^{t,x} \notin \mathcal{O}\}$ ,  $u(\tau^x, X_{\tau^x}^{0,x}) = 0$ , donc :

$$u(0, x) = \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{\forall s \in [t, T], X_s^{t,x} \in \mathcal{O}\}} e^{-\int_0^T r(s, X_s^{0,x}) ds} f(X_T^{0,x}) \right).$$

Ceci prouve le résultat pour  $t = 0$ . ■

**Remarque 1.10** Une option sur la variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable :

$$\mathbf{1}_{\{\forall s \in [t, T], X_s^{t,x} \in \mathcal{O}\}} e^{-\int_t^T r(X_s^{t,x}) ds} f(X_T^{t,x}),$$

porte le nom d'option "extinguishable" (au sens propre "que l'on autorise à disparaître"). En effet, dès que le cours sort de l'ouvert  $\mathcal{O}$ , la valeur de l'option est nulle : l'option disparaît. Lorsque l'actif suit le modèle de Black et Scholes et que  $\mathcal{O}$  est de la forme  $]0, l[$  ou  $]l, +\infty[$ , on connaît des formules explicites pour ces options (voir [CR85], dans ce livre ce type d'options porte le nom d'option "down and out", voir aussi l'exercice 27 du chapitre 4).

## 2 Résolution numérique des équations paraboliques.

Nous avons vu que l'on peut interpréter le prix d'une option européenne comme la solution de l'équation aux dérivées partielles (5.9). Nous allons maintenant, introduire une méthode de calcul numérique qui permet d'approcher une solution de (5.9) : la "méthode des différences finies". Cette méthode n'est évidemment pas utile dans le cas du modèle de Black et Scholes (puisque il y a une formule explicite) mais elle est indispensable pour des modèles de diffusion plus généraux. Nous ne ferons qu'énoncer les résultats importants. Pour une étude détaillée on consultera [GLT76] et [RT83].

### 2.1 Localisation

Le problème (5.9) se pose sur  $\mathbf{R}$ . Pour le discrétiser on va devoir se restreindre tout d'abord à un ouvert borné du type  $\mathcal{O}_l = ]-l, l[$ ,  $l$  étant une constante à choisir soigneusement si l'on veut que l'algorithme soit efficace. Il faut de plus imposer des conditions aux limites au bord (i.e. en  $l$  et  $-l$ ). On utilise soit des conditions de type Dirichlet (i.e. on impose  $u(l) = u(-l) = 0$  ou une autre valeur plus pertinente) soit des conditions de type Neumann (i.e. on impose  $(\partial u / \partial x)(l) = (\partial u / \partial x)(-l) = 0$  ou, là aussi, toute autre valeur non nulle pertinente). On obtient, par exemple, dans le cas où l'on impose des conditions de type Dirichlet l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \tilde{A}u(t, x) = 0 \text{ dans } [0, T] \times \mathcal{O}_l \\ u(t, l) = u(t, -l) = 0 \text{ si } t \in [0, T] \\ u(T, x) = f(x) \text{ si } x \in \mathcal{O}_l \end{cases}$$

Nous allons montrer comment on peut estimer l'erreur commise lorsque l'on se restreint à  $\mathcal{O}_l$ . Nous nous intéresserons uniquement au modèle de Black et Scholes (après changement de variable logarithmique), l'actif  $X_t$  est donc solution de l'équation :

$$dX_t = (r - \sigma^2/2)dt + \sigma dW_t.$$

On cherche à calculer le prix d'une option sur une variable aléatoire de la forme  $f(S_T) = f(S_0 e^{X_T})$ . On note  $\bar{f}(x) = f(e^x)$ . On impose, pour simplifier, des conditions de type Dirichlet.

On peut prouver que, dans ce cas, la solution  $u$  de (5.9) et les solutions  $u_1$  de (5.10) sont suffisamment régulières pour que l'on puisse affirmer que :

$$u(t, x) = \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} \bar{f}(X_T^{t,x}) \right)$$

et

$$u_1(t, x) = \mathbf{E} \left( \mathbf{1}_{\{\forall s \in [t, T], |X_s^{t,x}| < l\}} e^{-r(T-t)} \bar{f}(X_T^{t,x}) \right).$$

où  $X_s^{t,x} = x \exp((r - \sigma^2/2)(s-t) + \sigma(W_s - W_t))$ . Nous supposons, enfin, que la fonction  $f$  (et donc  $\bar{f}$ ) est bornée par une constante  $M$  et que  $r \geq 0$ . Il est alors facile de se convaincre que :

$$|u(t, x) - u_1(t, x)| \leq M \mathbf{P} \left( \exists s \in [t, T], |X_s^{t,x}| \geq l \right).$$

Mais, si  $r' = r - \sigma^2/2$  :

$$\begin{aligned} \{\exists s \in [t, T], |X_s^{t,x}| \geq l\} &\subset \left\{ \sup_{t \leq s \leq T} |x + r'(s-t) + \sigma(W_s - W_t)| \geq l \right\} \\ &\subset \left\{ \sup_{t \leq s \leq T} |x + \sigma(W_s - W_t)| \geq l - |r'T| \right\}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u_1(t, x)| &\leq M \mathbf{P} \left( \sup_{t \leq s \leq T} |x + \sigma(W_s - W_t)| \geq l - |r'T| \right) \\ &= M \mathbf{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T-t} |x + \sigma W_s| \geq l - |r'T| \right) \\ &\leq M \mathbf{P} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} |x + \sigma W_s| \geq l - |r'T| \right). \end{aligned}$$

Or on a établi à la proposition 3.6 que si  $T_a = \inf\{s > 0, W_s = a\}$ , alors  $\mathbf{E}(\exp(-\lambda T_a)) = \exp(-\sqrt{2\lambda}|a|)$ , on en déduit que si  $a > 0$ , pour tout  $\lambda$  :

$$\mathbf{P} \left( \sup_{s \leq T} W_s \geq a \right) = \mathbf{P}(T_a \leq T) \leq e^{\lambda T} \mathbf{E} \left( e^{-\lambda T_a} \right) \leq e^{\lambda T} e^{-a\sqrt{2\lambda}}.$$

En minimisant en  $\lambda$ , cela donne :

$$\mathbf{P} \left( \sup_{s \leq T} W_s \geq a \right) \leq e^{-\frac{a^2}{T}}.$$

On en déduit facilement que :

$$\mathbf{P} \left( \sup_{s \leq T} (x + \sigma W_s) \geq a \right) \leq e^{-\frac{|a-x|^2}{\sigma^2 T}},$$

puis que, comme  $(-W_s)_{s \geq 0}$  est encore un mouvement brownien :

$$\mathbf{P} \left( \inf_{s \leq T} (x + \sigma W_s) \leq -a \right) = \mathbf{P} \left( \sup_{s \leq T} (-x - \sigma W_s) \geq a \right) \leq e^{-\frac{|a+x|^2}{\sigma^2 T}}.$$

Ces deux résultats donnent  $\mathbf{P} \left( \sup_{s \leq T} |x + \sigma W_s| \geq a \right) \leq e^{-\frac{|a-x|^2}{\sigma^2 T}} + e^{-\frac{|a+x|^2}{\sigma^2 T}}$ . On peut donc affirmer que :

$$|u(t, x) - u_1(t, x)| \leq M \left( e^{-\frac{|l-|r'T|-x|^2}{\sigma^2 T}} + e^{-\frac{|l-|r'T|+x|^2}{\sigma^2 T}} \right). \quad (5.11)$$

Ceci prouve que pour  $t$  et  $x$  fixés  $\lim_{l \rightarrow +\infty} u_1(t, x) = u(t, x)$ . La convergence est même uniforme en  $t$  et en  $x$  si  $x$  reste dans une partie compacte de  $\mathbf{R}$ .

- Remarque 2.1** – On peut montrer que  $\mathbf{P}(\sup_{s \leq T} W_s \geq a) = 2\mathbf{P}(W_T \geq a)$  (voir exercice 18 du chapitre 3), ceci permet d’obtenir une estimation légèrement meilleure que celle calculée plus haut.
- L’intérêt de la méthode de localisation pour les calculs d’options décrite ici réside dans le fait qu’elle peut se généraliser au cas américain et dans ce cas cette étape est incontournable. L’estimation précédente permet alors de choisir de façon pertinente le domaine dans lequel on résoudra numériquement le problème. Ce choix est crucial dans l’efficacité de l’algorithme de calcul.

## 2.2 La méthode des différences finies

Une fois le problème localisé on obtient, par exemple, dans le cas où l’on impose des conditions de type Dirichlet le système différentiel suivant :

$$(E) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \tilde{A}u(t, x) = 0 \text{ dans } [0, T] \times \mathcal{O}_l \\ u(t, l) = u(t, -l) = 0 \text{ si } t \in [0, T] \\ u(T, x) = f(x) \text{ si } x \in \mathcal{O}_l \end{cases}$$

La méthode des différences finies réalise une discrétisation en temps et en espace de l’équation (E) .

On commence par discrétiser l’opérateur différentiel  $\tilde{A}$  sur  $\mathcal{O}_l$ . Pour cela on remplace une fonction  $(f(x))_{x \in \mathcal{O}_l}$  appartenant à un espace de dimension infinie, par un vecteur  $(f_i)_{1 \leq i \leq N}$  de dimension finie. On procède de la façon suivante, on pose  $x_i = -l + 2il/(N + 1)$ , pour  $0 \leq i \leq N + 1$ , chaque  $f_i$  est censé approximer  $f(x_i)$ . On approxime les conditions aux limites par  $f_0 = 0$ ,  $f_{N+1} = 0$  dans le cas de conditions de Dirichlet et  $f_0 = f_1$ ,  $f_N = f_{N+1}$  dans le cas de conditions de Neumann.

On note  $h = 2l/(N + 1)$  et  $u_h = (u_h^i)_{1 \leq i \leq N}$  un vecteur de  $\mathbf{R}^N$ . Pour discrétiser l’opérateur  $\tilde{A}$  par un opérateur  $\tilde{A}_h$  sur  $\mathbf{R}^N$ , on substitue à :

$$b(x_i) \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} \quad : \quad b(x_i) \frac{u_h^{i+1} - u_h^{i-1}}{2h}$$

et à :

$$\sigma^2(x_i) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \quad : \quad \sigma^2(x_i) \frac{\frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{h} - \frac{u_h^i - u_h^{i-1}}{h}}{h} = \frac{u_h^{i+1} - 2u_h^i + u_h^{i-1}}{h^2}.$$

On obtient ainsi un opérateur  $\tilde{A}_h$  sur  $\mathbf{R}^N$ .

**Remarque 2.2** Pour le modèle de Black et Scholes (après changement de variable logarithmique) :

$$\tilde{A}^{bs-\log} u(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u(x)}{\partial x} - ru(x),$$

on obtient :

$$(\tilde{A}_h u_h)_i = \frac{\sigma^2}{2h^2} (u_h^{i+1} - 2u_h^i + u_h^{i-1}) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{1}{2h} (u_h^{i+1} - u_h^{i-1}) - ru_h^i$$

$\tilde{A}_h$  est donc représenté par la matrice tridiagonale suivante, en tenant compte des conditions



aux limites de type Dirichlet :

$$\left( (\tilde{A}_h)_{ij} \right)_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sigma^2}{2h^2} - \frac{1}{2h} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \\ \beta = -\frac{\sigma^2}{h^2} - r \\ \gamma = \frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \end{cases}$$

Si on impose des conditions de type Neumann  $\tilde{A}_h$  prend la forme :

$$\begin{pmatrix} \beta + \alpha & \gamma & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta + \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Cette discrétisation en espace permet de ramener (E) à une équation différentielle ordinaire ( $E_h$ ) :

$$(E_h) \quad \begin{cases} \frac{du_h(t)}{dt} + \tilde{A}_h u_h(t) = 0 & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ u_h(T) = f_h \end{cases}$$

où  $f_h = (f_h^i)_{1 \leq i \leq N}$  est le vecteur  $f_h^i = f(x_i)$ .

On discrétise alors cette équation en temps grâce à ce que l'on appelle des  $\theta$ -schémas. Cela signifie que l'on se donne  $\theta \in [0, 1]$ ,  $k$  un pas de temps tel que  $T = Mk$  et que l'on approxime la solution  $u_h$  de ( $E_h$ ) à l'instant  $nk$  par  $u_{h,k}$  solution de :

$$(E_{h,k}) \quad \begin{cases} u_{h,k}^M = f_h \\ n \text{ décroissant, on résout pour chaque } n : \\ \frac{u_{h,k}^{n+1} - u_{h,k}^n}{k} + \theta \tilde{A}_h u_{h,k}^n + (1 - \theta) \tilde{A}_h u_{h,k}^{n+1} = 0 & \text{si } 0 \leq n \leq M - 1 \end{cases}$$

**Remarque 2.3** – Lorsque  $\theta = 0$  le schéma précédent porte le nom de schéma explicite, car  $u_{h,k}^n$  se calcule en fonction de  $u_{h,k}^{n+1}$ . Lorsque  $\theta > 0$ , par contre, on doit résoudre à chaque étape un système du type  $Tu_{h,k}^n = b$ , avec :

$$\begin{cases} T = (I - \theta k \tilde{A}_h) \\ b = (I + (1 - \theta) k \tilde{A}_h) u_{h,k}^{n+1} \end{cases}$$

où  $T$  est une matrice tridiagonale. Ceci est évidemment plus complexe (et donc plus long informatiquement). Cependant ces schémas sont les plus utilisés dans la pratique, car ils ont de bonnes propriétés de convergence comme on le verra plus tard.

– Lorsque  $\theta = 1/2$ , on parle de schéma de Crank et Nicholson. Ce schéma est souvent utilisé pour la résolution de systèmes de type (E) lorsque  $b = 0$  et  $\sigma$  est constante.

- Lorsque  $\theta = 1$ , on parle de schéma totalement implicite.

Donnons maintenant des résultats de convergence de la solution  $u_{h,k}$  de  $(E_{h,k})$  vers  $u(t, x)$  solution de (E) sous hypothèse d'ellipticité. Nous renvoyons à [RT83] et à [GLT76] pour une démonstration. On notera  $u_h^k(t, x)$  la fonction :

$$\sum_{n=1}^M \sum_{i=1}^N (u_{h,k}^n)_i \mathbf{1}_{|x_i - h/2, x_i + h/2]} \times \mathbf{1}_{[(n-1)k, nk]}.$$

Et  $\delta\phi$  l'opérateur de dérivation approchée défini par :

$$(\delta\phi)(x) = \frac{1}{h} (\phi(x + h/2) - \phi(x - h/2))$$

**Théorème 2.4** *On suppose que  $b$  et  $\sigma$  sont lipschitziennes et que  $r$  est une fonction continue et positive. Rappelons que  $\tilde{A}f(x)$  vaut dans ce cas  $1/2\sigma(x)^2(\partial^2 f(x)/\partial x^2) + b(x)(\partial f(x)/\partial x) - r(x)f(x)$ . On suppose que l'opérateur  $\tilde{A}$  est elliptique :  $(-\tilde{A}u, u)_{L^2(\mathcal{O}_1)} \geq \epsilon(|u|_{L^2(\mathcal{O}_1)} + |u'|_{L^2(\mathcal{O}_1)})$  avec  $\epsilon > 0$ . Alors :*

- lorsque  $1/2 \leq \theta \leq 1$  si  $h, k$  tendent vers 0 on a :

$$\begin{aligned} \lim u_h^k &= u \quad \text{dans l'espace } L^2([0, T] \times \mathcal{O}_1) \\ \lim \delta u_h^k &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dans l'espace } L^2([0, T] \times \mathcal{O}_1) \end{aligned}$$

- lorsque  $0 \leq \theta < 1/2$ , si  $h, k$  tendent vers 0 et si de plus  $\lim k/h^2 = 0$  on a :

$$\begin{aligned} \lim u_h^k &= u \quad \text{dans l'espace } L^2([0, T] \times \mathcal{O}_1) \\ \lim \delta u_h^k &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dans l'espace } L^2([0, T] \times \mathcal{O}_1) \end{aligned}$$

**Remarque 2.5** – Dans le cas  $0 \leq \theta < 1/2$  on parle de schéma *conditionnellement convergent*, la convergence n'ayant lieu que si l'on fait tendre  $h$  et  $k$  et  $k/h^2$  vers 0. Ces schémas sont numériquement délicats à exploiter. Ils sont peu utilisés dans la pratique, sauf lorsque  $\theta = 0$ .

- Dans le cas  $1/2 \leq \theta \leq 1$  on parle de schéma *inconditionnellement convergent*, la convergence ayant lieu sans restriction, si l'on fait tendre  $h$  et  $k$  vers 0.

Nous allons maintenant voir comment on résout algorithmiquement l'équation  $(E_{h,k})$ . A chaque pas de temps  $n$  on cherche une solution de  $TX = G$  où :

$$\begin{cases} X = u_{h,k}^n \\ G = (I + (1 - \theta)k\tilde{A}_h) u_{h,k}^{n+1} \\ T = I - k\theta\tilde{A}_h. \end{cases}$$

$T$  est une matrice tridiagonale. L'algorithme suivant (il s'agit en fait de la méthode de Gauss) permet de résoudre ce système en utilisant un nombre de multiplications proportionnel à  $N$ . Posons  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq N}$ ,  $G = (g_i)_{1 \leq i \leq N}$  et :

$$T = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_N & b_N \end{pmatrix}$$

On procède alors de la façon suivante : on rend la matrice  $T$  triangulaire inférieure par la méthode du pivot en partant du bas de la matrice.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Remontée :} \\ b'_N = b_N \\ g'_N = g_N \\ \text{Pour } 1 \leq i \leq N-1, \text{ } i \text{ décroissant :} \\ b'_i = b_i - c_i a_{i+1} / b'_{i+1} \\ g'_i = g_i - c_i g'_{i+1} / b'_{i+1} \end{array} \right\}$$

Après cette transformation on obtient un système équivalent de la forme  $T'X = G'$ , avec :

$$T' = \begin{pmatrix} b'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b'_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b'_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & b'_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_N & b'_N \end{pmatrix}.$$

Il suffit, alors, de calculer  $X$  en partant du haut de la matrice.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Descente :} \\ x_1 = g'_1 / b'_1 \\ \text{Pour } 2 \leq i \leq N, \text{ } i \text{ croissant} \\ x_i = (g'_i - a_i x_{i-1}) / b'_i \end{array} \right\}$$

**Remarque 2.6** La matrice  $T$  n'est pas forcément inversible. Cependant, si elle vérifie, pour tout  $i$ ,  $|a_i| + |c_i| \leq |b_i|$ , on peut prouver qu'elle l'est. Lorsque  $T$  n'est pas inversible, l'algorithme précédent peut conduire à des résultats erronés. Il est facile de vérifier que la condition précédente d'inversibilité est remplie, dans le cas du modèle de Black et Scholes si  $|r - \sigma^2/2| \leq \sigma^2/h$ , c'est à dire si  $h$  est suffisamment petit.

### 3 Le problème des options américaines

#### 3.1 Formulation du problème

La théorie des options américaines pour les modèles à temps continu est délicate. Pour le modèle de Black et Scholes, on a obtenu la formule suivante pour la valeur d'un call ( $f = (x - K)_+$ ) ou d'un put ( $f = (K - x)_+$ ) américain :

$$V_t = \Phi(t, S_t)$$

où :

$$\Phi(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}^* \left( e^{-r(\tau-t)} f \left( x e^{(r-\sigma^2/2)(\tau-t) + \sigma(W_\tau - W_t)} \right) \right)$$

où, sous  $\mathbf{P}^*$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard et  $\mathcal{T}_{t,T}$  l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans  $[t, T]$ . Dans le cas du call américain (sur une action sans dividende), on obtient la même expression que pour le call européen, mais, pour le put américain, il n'y a pas de formule explicite et les méthodes numériques sont inévitables.

Le problème à résoudre est un cas particulier du problème suivant : étant donnée une “bonne” fonction  $f$  et une diffusion  $(X_t)_{t \geq 0}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ , solution du système (5.4), calculer la fonction :

$$\Phi(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbf{E} \left( e^{-\int_t^\tau r(s, X_s^{t, x}) ds} f(X_\tau^{t, x}) \right).$$

Notons que l’on a  $\Phi(t, x) \geq f(x)$  et (en prenant  $t = T$ )  $\Phi(T, x) = f(x)$ .

**Remarque 3.1** On peut alors démontrer (voir chapitre le 2 pour l’analogie avec les modèles discrets et le chapitre 4 dans le cas du modèle de Black et Scholes) que le processus :

$$e^{-\int_0^t r(s, X_s) ds} \Phi(t, X_t)$$

est la plus petite surmartingale majorant à tout instant le processus  $f(X_t)$ .

On a vu que le calcul du prix d’une option européenne est relié à une équation aux dérivées partielles de type parabolique. Dans le cas d’une option américaine, on a un résultat similaire, mais qui fait intervenir un *système d’inéquations aux dérivées partielles parabolique*. Le théorème suivant précise ce lien. Il est énoncé de façon volontairement informelle.

**Théorème 3.2** *Supposons que  $u$  soit une “solution régulière” du système d’inéquations aux dérivées partielles suivant :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru \leq 0, & u \geq f & \text{dans } [0, T] \times \mathbf{R}^n \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + A_t u - ru \right) (f - u) = 0 & & \text{dans } [0, T] \times \mathbf{R}^n \\ u(T, x) = f(x) & & \text{dans } \mathbf{R}^n \end{cases} \quad (5.13)$$

Alors  $u(t, x) = \Phi(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbf{E} \left( e^{-\int_t^\tau r(s, X_s^{t, x}) ds} f(X_\tau^{t, x}) \right)$ .

**Démonstration :** Nous n’allons pas donner une démonstration précise de ce résultat, mais simplement ses grandes lignes. Pour une démonstration détaillée, on consultera [BL78] (chapitre 3 section 2) et [JLL90] (section 3). On se ramène au cas où  $t = 0$  (la démonstration étant pratiquement identique lorsque  $t > 0$ ). On note  $X_t^x$  la solution de (5.4) issue de  $x$  en 0. La proposition 1.3 permet d’affirmer que le processus :

$$M_t = e^{-\int_0^t r(s, X_s^x) ds} u(t, X_t^x) - \int_0^t e^{-\int_0^s r(v, X_v^x) dv} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + A_s u - ru \right) (s, X_s^x) ds$$

est une martingale. En appliquant le théorème d’arrêt (théorème 3.4 du chapitre 3) à cette martingale entre 0 et  $\tau$ , un temps d’arrêt plus petit que  $T$  on obtient  $\mathbf{E}(M_\tau) = \mathbf{E}(M_0)$ , et comme  $\frac{\partial u}{\partial t} + A_s u - ru \leq 0$  :

$$u(0, x) \geq \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^\tau r(s, X_s^x) ds} u(\tau, X_\tau^x) \right).$$

Mais  $u(t, x) \geq f(x)$ , donc  $u(0, x) \geq \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^\tau r(s, X_s^x) ds} f(X_\tau^x) \right)$ . Ce qui prouve que :

$$u(0, x) \geq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T}} \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^\tau r(s, X_s^x) ds} f(X_\tau^x) \right) = F(0, x).$$

Maintenant, si on pose  $\tau_{\text{opt}} = \inf\{0 \leq s \leq T, u(s, X_s^x) = f(X_s^x)\}$ , on peut montrer que  $\tau_{\text{opt}}$  est un temps d’arrêt. D’autre part, pour  $s$  entre 0 et  $\tau_{\text{opt}}$ , on a :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + A_s u - ru \right) (s, X_s^x) = 0.$$

On en déduit, grâce au théorème d'arrêt, que :

$$u(0, x) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^{\tau_{\text{opt}}} r(s, X_s^x) ds} u(\tau_{\text{opt}}, X_{\tau_{\text{opt}}}^x) \right).$$

Mais à l'instant  $\tau_{\text{opt}}$ ,  $u(\tau_{\text{opt}}, X_{\tau_{\text{opt}}}^x) = f(X_{\tau_{\text{opt}}}^x)$ , d'où :

$$u(0, x) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_0^{\tau_{\text{opt}}} r(s, X_s^x) ds} f(X_{\tau_{\text{opt}}}^x) \right).$$

Ce qui prouve que  $u(0, x) \leq F(0, x)$ , puis que  $u(0, x) = F(0, x)$ . On a même "démontré" que  $\tau_{\text{opt}}$  est un temps d'arrêt optimal (i.e. qui réalise le supremum parmi tous les temps d'arrêt). ■

**Remarque 3.3** La formulation précise du système (5.13) est délicate, car même pour  $f$  régulière, la solution  $u$  n'est pas de classe  $C^2$  en général. La bonne méthode consiste à introduire une formulation variationnelle du problème (voir [BL78]). La démonstration qui est esquissée plus haut est rendue difficile par le fait que l'on ne peut pas appliquer directement la formule de Itô à une solution de l'inéquation précédente.

### 3.2 Le put américain dans le modèle de Black et Scholes

Nous quittons le cas général pour nous occuper du *calcul du put américain dans le cas du modèle de Black et Scholes*.

On se place sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$  pour laquelle le processus  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard, et telle que le prix de l'actif  $S_t$  vérifie :

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma dW_t).$$

On a vu au paragraphe 1.3 que l'on peut se ramener à un opérateur elliptique en introduisant le processus :

$$X_t = \log(S_t) = \log(S_0) + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t,$$

Le générateur infinitésimal de  $X_t$ ,  $A$  est alors indépendant du temps et :

$$\tilde{A}^{\text{bs-log}} = A^{\text{bs-log}} - r = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} - r.$$

Si l'on note  $\phi(x) = (K - e^x)_+$ , l'inéquation aux dérivées partielles associée au calcul du prix de put américain s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \tilde{A}^{\text{bs-log}} v(t, x) \leq 0 & \text{p.p. dans } [0, T] \times \mathbf{R} \\ v(t, x) \geq \phi(x) & \text{p.p. dans } [0, T] \times \mathbf{R} \\ (v(t, x) - \phi(x)) \left( \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \tilde{A}^{\text{bs-log}} v(t, x) \right) = 0 & \text{p.p. dans } [0, T] \times \mathbf{R} \\ v(T, x) = \phi(x). \end{cases} \quad (5.14)$$

Le théorème suivant donne un résultat d'existence et d'unicité pour cette inéquation aux dérivées partielles et établit le lien avec le prix du put américain  $\Phi(t, x)$ .

**Théorème 3.4** *L'inéquation (5.14) admet une solution unique  $v(t, x)$  continue et bornée telle que les dérivées au sens des distributions  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  soient localement bornées. De plus cette solution vérifie :*

$$v(t, \log(x)) = \Phi(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbf{E}^* \left( e^{-r(\tau-t)} f \left( x e^{(r-\sigma^2/2)(\tau-t) + \sigma(W_\tau - W_t)} \right) \right).$$

Pour une démonstration de ce résultat on consultera [JLL90].

### Résolution numérique de l'inéquation

Nous allons voir comment on peut résoudre l'inéquation (5.14) par une méthode numérique. On procède essentiellement de la même façon que dans le cas européen. On commence par localiser le problème pour se ramener à une inéquation dans  $\mathcal{O}_l = ]-l, l[$ . On doit alors imposer des conditions aux limites en  $\pm l$ . Par soucis de simplicité, nous écrivons, ici, l'inéquation avec des conditions de type Neumann en annulant les dérivées en  $x$  en  $\pm l$ <sup>1</sup> :

$$(A) \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \tilde{A}^{bs-\log v}(t, x) \leq 0 & \text{p.p. dans } [0, T] \times \mathcal{O}_l \\ v(t, x) \geq \phi(x) & \text{p.p. dans } [0, T] \times \mathcal{O}_l \\ (v - \phi) \left( \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \tilde{A}^{bs-\log v}(t, x) \right) = 0 & \text{p.p. dans } [0, T] \times \mathcal{O}_l \\ v(T, x) = \phi(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(t, \pm l) = 0. \end{cases}$$

Nous allons maintenant discrétiser l'inéquation (A) à l'aide de la méthode des éléments finis. On reprend les notations du paragraphe 2.2. En particulier  $M$  est un nombre entier tel que  $Mk = T$ ,  $f_h$  est le vecteur donné par  $f_h^i = \phi(x_i)$  où  $x_i = -l + 2il/(N + 1)$  et  $\tilde{A}_h$  est donné par (5.12). On note, si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ ,  $u \leq v$  pour  $\forall 1 \leq i \leq n$ ,  $u_i \leq v_i$ . La démarche est alors formellement similaire à celle du cas européen : par discrétisation en espace et en temps, on se ramène à l'inéquation en dimension finie  $(A_{h,k})$  :

$$(A_{h,k}) \begin{cases} u_{h,k}^M = f_h \\ \text{Et si } 0 \leq n \leq M - 1 \\ u_{h,k}^n \geq f_h \\ u_{h,k}^{n+1} - u_{h,k}^n + k \left( \theta \tilde{A}_h u_{h,k}^n + (1 - \theta) \tilde{A}_h u_{h,k}^{n+1} \right) \leq 0 \\ \left( u_{h,k}^{n+1} - u_{h,k}^n + k \left( \theta \tilde{A}_h u_{h,k}^n + (1 - \theta) \tilde{A}_h u_{h,k}^{n+1} \right), u_{h,k}^n - f_h \right) = 0 \end{cases}$$

où  $(x, y)$  est le produit scalaire de  $\mathbf{R}^N$  et  $\tilde{A}_h$  est donnée par (5.12). Si on note :

$$\begin{cases} T &= I - k\theta \tilde{A}_h \\ X &= u_{h,k}^n \\ G &= (I + k(1 - \theta) \tilde{A}_h) u_{h,k}^{n+1} \\ F &= f_h, \end{cases}$$

on a à résoudre à chaque pas de temps  $n$ , le système d'inéquations :

$$(AD) \begin{cases} TX \geq G \\ X \geq F \\ (TX - G, X - F) = 0. \end{cases}$$

$T$  est la matrice tridiagonale :

$$T = \begin{pmatrix} a + b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & c & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b + c \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>En pratique on impose plutôt les conditions aux limites suivantes, plus naturelles,  $\frac{\partial v}{\partial x}(t, l) = 0$  et  $v(t, -l) = \phi(-l)$ .

avec :

$$\begin{cases} a = \theta k \left( -\frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \\ b = 1 + \theta k \left( \frac{\sigma^2}{h^2} + r \right) \\ c = -\theta k \left( \frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \end{cases}$$

(AD) est une inéquation en dimension finie. On sait résoudre de tels systèmes d'inéquations à la fois théoriquement et algorithmiquement, si la matrice  $T$  est coercive (c'est à dire si  $X.TX \geq \alpha X.X$ , avec  $\alpha > 0$ ). On peut d'autre part vérifier que, dans notre cas,  $T$  vérifie cette hypothèse si  $\left| r - \frac{\sigma^2}{2} \right| \leq \frac{\sigma^2}{h}$  et si  $\frac{k}{2h} \left| r - \frac{\sigma^2}{2} \right| < 1$ . En effet, cette condition implique que  $a$  et  $c$  sont négatifs, et donc, en utilisant que  $2|xy| \leq x^2 + y^2$  :

$$\begin{aligned} x.Tx &= \sum_{i=2}^n a x_{i-1} x_i + \sum_{i=1}^n b x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} c x_i x_{i+1} + a x_1^2 + c x_n^2 \\ &\geq (a/2) \sum_{i=2}^n (x_{i-1}^2 + x_i^2) + \sum_{i=1}^n b x_i^2 + (c/2) \sum_{i=1}^{n-1} (x_i^2 + x_{i+1}^2) + a x_1^2 + c x_n^2 \\ &\geq \left( a + b + c - \frac{1}{2}|a - c| \right) \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \left( 1 - \frac{k}{2h} \left| r - \frac{\sigma^2}{2} \right| \right) \sum_{i=1}^n x_i^2. \end{aligned}$$

Sous cette hypothèse de coercivité on peut prouver qu'il existe une solution unique pour le problème  $(A_{h,k})$  (voir exercice 28).

Le théorème suivant précise la nature de la convergence d'une solution de  $(A_{h,k})$  vers la solution de  $(A)$ . On note :

$$u_h^k(t, x) = \sum_{n=1}^M \sum_{i=1}^N (u_{h,k}^n)_i \mathbf{1}_{]x_i - h/2, x_i + i/2]} \times \mathbf{1}_{](n-1)k, nk]}.$$

**Théorème 3.5** Si  $u$  est une solution de  $(A)$ ,

1. si  $\theta < 1$  la convergence est conditionnelle : si  $h$  et  $k$  tendent vers 0 et si  $k/h^2$  tend vers 0 alors :

$$\begin{aligned} \lim u_h^k &= u \quad \text{dans l'espace } L^2([0, T] \times \mathcal{O}_1) \\ \lim \delta u_h^k &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dans l'espace } L^2([0, T] \times \mathcal{O}_1) \end{aligned}$$

2. si  $\theta = 1$  la convergence est inconditionnelle : la convergence précédente a lieu si  $h$  et  $k$  tendent vers 0 sans restriction.

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [GLT76] et [Zha97].

**Remarque 3.6** Dans la pratique on utilise surtout  $\theta = 1$ , à cause de ses propriétés de convergence inconditionnelle.

### Résolution algorithmique de l'inéquation en dimension finie

Dans le cas du *put américain*, et lorsque le pas  $h$  est suffisamment petit, on sait résoudre le système (AD) très efficacement en modifiant l'algorithme de résolution des systèmes d'équa-

tions tridiagonaux. On procède comme suit (on note  $b$  le vecteur  $(a + b, b, \dots, b + c)$ ) :

**Remontée :**

$$b'_N = b_N$$

$$g'_N = g_N$$

Pour  $1 \leq i \leq N - 1$ ,  $i$  décroissant

$$b'_i = b_i - ca/b'_{i+1}$$

$$g'_i = g_i - cg'_{i+1}/b'_{i+1}$$

**Descente “américaine” :**

$$x_1 = g'_1/b'_1$$

Pour  $2 \leq i \leq N$ ,  $i$  croissant

$$\tilde{x}_i = (g'_i - ax_{k-1})/b'_i$$

$$x_i = \sup(\tilde{x}_i, f_i)$$

On trouvera la preuve que, sous les hypothèses précédentes, cet algorithme calcule bien une solution de l'inéquation (AD) dans [JLL90].

**Remarque 3.7** L'algorithme est exactement le même que dans le cas européen en dehors de l'étape  $x_i = \sup(\tilde{x}_i, f_i)$ . Ceci le rend très efficace.

Il existe d'autres algorithmes permettant de résoudre les inéquations en dimension finie, on trouvera une description de certaines de ces méthodes dans [JLL90] (pour des méthodes exactes) et [GLT76] (pour des méthodes itératives).

**Remarque 3.8** Lorsque l'on fait  $\theta = 1$  dans  $(A_{h,k})$ , que l'on impose des conditions aux limites du type Neumann et que l'on applique l'algorithme de résolution précédent, la méthode de résolution porte le nom d' "algorithme de Brennan et Schwartz" [BS77].

Il faut bien noter que l'algorithme précédent ne calcule la solution correcte du système d'inéquations (AD), que sous les hypothèses soulignées plus haut, en particulier, il est spécifique au cas du put américain. Il existe des cas où le résultat calculé par cet algorithme n'est pas la solution de (AD), comme on s'en convainc aisément sur l'exemple suivant :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solution calculée par l'algorithme vaut alors :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas solution de (AD).

**Remarque 3.9** On pourra trouver une implémentation de l'algorithme de "Brennan et Schwartz" décrit dans ce paragraphe au chapitre 8.



### 3.3 La méthode binomiale pour le calcul du put américain

Nous allons présenter une autre méthode d'approximation du prix du put américain pour le modèle de Black et Scholes. Soient  $r, a, b$  des nombres réels, tels que  $-1 < a < r < b$ . Soit  $(S_n)_{n \geq 0}$  le modèle binomial défini par,  $S_0 = x$  et  $S_{n+1} = S_n T_n$ , où  $(T_n)_{n \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées, telles que  $\mathbf{P}(T_n = 1 + a) = p = (b - r)/(b - a)$  et  $\mathbf{P}(T_n = 1 + b) = 1 - p$ . On a vu au chapitre 2 paragraphe 4 que le prix du put américain, dans ce modèle, s'écrivait sous la forme :

$$\mathcal{P}_n = P_{\text{am}}(n, S_n),$$

et que la fonction  $P_{\text{am}}(n, x)$  pouvait se calculer à l'aide de la relation de récurrence :

$$P_{\text{am}}(n, x) = \max \left( (K - x)^+, \frac{pP_{\text{am}}(n+1, (1+a)x) + (1-p)P_{\text{am}}(n+1, (1+b)x)}{1+r} \right). \quad (5.15)$$

et de la valeur en  $N$ ,  $P_{\text{am}}(N, x) = (K - x)^+$ . D'autre part, le problème corrigé du chapitre 1 paragraphe 4 prouve que si :

$$\begin{cases} r &= \frac{RT}{N} \\ 1+a &= e^{-\sqrt{T} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \\ 1+b &= e^{+\sqrt{T} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \\ p &= \frac{b-r}{b-a}, \end{cases} \quad (5.16)$$

le prix d'une option européenne dans ce modèle binomial approxime le prix pour le modèle de Black et Scholes, pour un taux d'intérêt  $R$  et une volatilité  $\sigma$ . Cela suggère la méthode de calcul suivante pour le calcul du put américain. On se donne une valeur de  $N$ , on fixe les valeurs de  $r, a, b, p$  à l'aide de (5.16) et on utilise la relation de récurrence (5.15) pour calculer le prix associé à cette discrétisation  $P_{\text{am}}^N(n, \cdot)$  aux points  $x(1+a)^{n-i}(1+b)^i$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Il semble naturel de penser que  $P_{\text{am}}^N(0, x)$  est une approximation du prix américain dans le modèle de Black et Scholes  $P(0, x)$ .

On peut, effectivement, démontrer que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} P_{\text{am}}^N(0, x) = P(0, x)$ . Le résultat précédent est délicat à justifier (voir [Kus77] et [LP90]), nous ne chercherons pas à le démontrer.

La méthode que nous venons de décrire porte le nom de méthode de Cox Ross Rubinstein. Elle est décrite dans [CR85].

## 4 Exercices

**Exercice 28** On note  $(X, Y)$  le produit scalaire de deux vecteurs  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathbf{R}^n$ . La notation  $X \geq Y$  signifie que pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ ,  $x_i \geq y_i$ . On suppose que  $M$  vérifie, pour tout  $X$  de  $\mathbf{R}^n$   $(X, MX) \geq \alpha(X, X)$  avec  $\alpha > 0$ . Nous allons étudier le système :

$$\begin{cases} MX \geq G \\ X \geq F \\ (MX - G, X - F) = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que ce problème est équivalent à trouver  $X \geq F$  tel que :

$$\forall V \geq F \quad (MX - G, V - X) \geq 0. \quad (5.17)$$

2. Démontrer l'unicité d'une solution de (5.17).

3. Démontrer que si  $M$  est la matrice identité, alors il existe une solution unique à (5.17).
4. Soit  $\rho$  un nombre positif, on note  $S_\rho(X)$  l'unique  $Y \geq F$  tel que :

$$\forall V \geq F \quad (Y - X + \rho(MX - G), V - Y) \geq 0.$$

Montrer que, si  $\rho$  est assez petit,  $S_\rho$  est une application contractante.

5. En déduire l'existence d'une solution de (5.17).

**Exercice 29** On cherche à approximer le prix du put américain dans le modèle de Black et Scholes  $u(t, x)$ . On rappelle que  $u$  est solution de l'inéquation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \tilde{A}^{bs}u(t, x) \leq 0 & \text{p.p. dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ u(t, x) \geq (K - x)_+ & \text{p.p. dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ (u - (K - x)_+) \left( \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \tilde{A}^{bs}u(t, x) \right) = 0 & \text{p.p. dans } [0, T] \times ]0, +\infty[ \\ u(T, x) = (K - x)_+ \end{cases}.$$

où :

$$\tilde{A}^{bs} = \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x} - r.$$

1. On note  $u_e(t, x)$  la valeur du put européen pour le modèle de Black Scholes. Ecrire le système d'inéquations vérifié par  $v = u - u_e$ .
2. On va approximer la solution  $v = u - u_e$  de cette inéquation en la discrétisant uniquement en temps et *en utilisant un seul pas de temps*. Lorsque on utilise une méthode totalement implicite, montrer que l'approximation  $\tilde{v}(x)$  de  $v(0, x)$  vérifie :

$$\begin{cases} -\tilde{v}(x) + T\tilde{A}^{bs}\tilde{v}(x) \leq 0 & \text{p.p. dans } ]0, +\infty[ \\ \tilde{v}(t, x) \geq \tilde{\psi}(x) = (K - x)_+ - u_e(0, x) & \text{p.p. dans } ]0, +\infty[ \\ (\tilde{v}(x) - \tilde{\psi}(x)) (-\tilde{v}(x) + T\tilde{A}^{bs}\tilde{v}(x)) = 0 & \text{p.p. dans } ]0, +\infty[ \end{cases}. \quad (5.18)$$

3. Trouver l'unique valeur de  $\alpha$  telle que  $v(x) = x^\alpha$  soit solution de  $-v(x) + T\tilde{A}^{bs}v(x) = 0$  et telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$
4. On va chercher une solution continue à dérivée continue de (5.18) sous la forme :

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} \lambda x^\alpha & \text{si } x \geq x^* \\ \tilde{\psi}(x) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.19)$$

Ecrire les équations que doivent vérifier  $\lambda$  et  $\alpha$  pour que  $\tilde{v}$  soit continue et à dérivée continue en  $x^*$ . En déduire, que si  $\tilde{v}$  est continue et à dérivée continue, alors  $x^*$  est solution de  $f(x) = x$  où :

$$f(x) = |\alpha| \frac{K - u_e(0, x)}{u_e'(0, x) + 1 + |\alpha|},$$

et  $u_e'(t, x) = (\partial u_e(t, x) / \partial x)$ .

5. En utilisant la formule explicite de  $u_e(0, x)$  (voir chapitre 4 équation 4.9) démontrer que  $f(0) > 0$ , que  $f(K) < K$  (on pourra utiliser la convexité de la fonction  $u_e$ ) et que  $f(x) - x$  est décroissante. En déduire qu'il existe une solution unique à  $f(x) = x$ .
6. Démontrer que  $\tilde{v}(x)$  définie par (5.19) où  $x^*$  est la solution unique de  $f(x) = x$  est une solution de (5.18).

7. Proposer un algorithme itératif (utilisant une méthode de dichotomie) permettant de calculer  $x^*$ , avec une précision arbitraire.
8. Ecrire un algorithme en `Pascal` implémentant une approximation du put américain à partir de ce qui précède.

L'algorithme que nous venons de décrire est une version (légèrement différente) de l'algorithme de Mac Millan [Mil86] (voir également Barone-Adesi et Waley [BAW87]).



# Chapitre 6

## Modèles de taux d'intérêt

Les modèles de taux d'intérêt sont utilisés principalement pour "pricer" et couvrir des obligations et des options sur obligations. Jusqu'à présent, aucun modèle n'a pu s'imposer comme modèle de référence au même titre que le modèle de Black-Scholes pour les options sur actions. Dans ce chapitre, nous tentons de présenter les principes de base de la modélisation (en suivant essentiellement [AD89]) puis, nous illustrons la théorie par l'étude de trois modèles particuliers.

### 1 Principes de la modélisation

#### 1.1 Notion de courbe des taux

Dans la plupart des modèles que nous avons introduits jusqu'à présent, le taux d'intérêt est supposé constant. Dans la réalité, on observe que le taux d'intérêt d'un prêt dépend à la fois de la date  $t$  d'émission du prêt et de la date  $T$  d'échéance ou de "maturité" du prêt.

Une personne empruntant 1 franc à l'instant  $t$ , jusqu'à l'échéance  $T$ , devra rembourser une somme  $F(t, T)$  à la date  $T$ , ce qui équivaut à un taux d'intérêt moyen  $R(t, T)$  donné par l'égalité

$$F(t, T) = e^{(T-t)R(t, T)}.$$

Si on se place en environnement certain, c'est à dire si on suppose que tous les taux d'intérêt  $(R(t, T))_{t \leq T}$  sont connus, alors, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, la fonction  $F$  doit vérifier :

$$\forall t < u < s \quad F(t, s) = F(t, u)F(u, s).$$

Il est facile en effet d'exhiber des arbitrages possibles lorsque cette égalité n'est pas vérifiée (exercice !). Cette relation, jointe à l'égalité  $F(t, t) = 1$ , entraîne, si  $F$  est régulière, l'existence d'une fonction  $r(t)$  telle que :

$$\forall t < T \quad F(t, T) = \exp\left(\int_t^T r(s) ds\right)$$

et, par conséquent :

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s) ds.$$

La fonction  $r(s)$  s'interprète comme le taux d'intérêt instantané.

En environnement incertain, ce raisonnement n'est plus possible. A la date  $t$ , les taux d'intérêt futurs  $R(u, T)$  pour  $T > u > t$ , ne sont pas connus. Néanmoins, on conçoit qu'il y ait des liaisons entre les différents taux, le but de la modélisation étant de les préciser.

Le problème se pose concrètement en terme de pricing des obligations. Nous appellerons "obligation zéro-coupon" un titre donnant droit à 1 franc à une date d'échéance  $T$  et nous noterons  $P(t, T)$  la valeur de ce titre à l'instant  $t$ . On a évidemment  $P(T, T) = 1$  et, en environnement certain :

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(s) ds}. \tag{6.1}$$

## 1.2 Courbe des taux en avenir incertain

En avenir incertain, il faut penser le taux instantané comme un processus aléatoire : entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , on peut emprunter au taux  $r(t)$  (dans la pratique c'est un taux à court terme, par exemple le taux au jour le jour). Pour préciser la modélisation, nous nous placerons sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T})$  et nous supposons que la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  et que  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ . Comme dans les modèles étudiés précédemment, nous introduisons un actif dit "sans risque", dont le prix à l'instant  $t$  est donné par :

$$S_t^0 = e^{\int_0^t r(s) ds}$$

où  $(r(t))_{0 \leq t \leq T}$  est un processus adapté vérifiant :  $\int_0^T |r(t)| dt < \infty$ , presque sûrement. L'appellation d'actif sans risque peut sembler étrange pour un actif dont le prix dépend du hasard ; nous verrons plus loin en quoi cet actif est moins "risqué" que les autres. Les actifs risqués sont ici les obligations zéro-coupon d'échéance inférieure ou égale à l'horizon  $T$ . Pour chaque instant  $u \leq T$ , nous introduisons donc un processus adapté  $(P(t, u))_{0 \leq t \leq u}$ , vérifiant  $P(u, u) = 1$  et donnant le prix du zéro-coupon d'échéance  $u$  en fonction du temps.

Dans le chapitre 1, nous avons caractérisé, dans le cadre des modèles discrets, l'absence d'opportunité d'arbitrage par l'existence d'une probabilité équivalente sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. L'extension de ce type de résultat à des modèles à temps continu est délicate (cf. [HK79], [Str90], [AD89] et [DS94]), mais nous avons pu constater, dans le chapitre 4, que l'existence d'une telle probabilité était vérifiée dans le modèle de Black-Scholes. En nous appuyant sur ces exemples, nous allons ici prendre comme point de départ de la modélisation l'hypothèse suivante :

**(H)** Il existe une probabilité  $\mathbf{P}^*$  équivalente à  $\mathbf{P}$ , sous laquelle, pour tout réel  $u \in [0, T]$ , le processus  $(\tilde{P}(t, u))_{0 \leq t \leq u}$  défini par :

$$\tilde{P}(t, u) = e^{-\int_0^t r(s) ds} P(t, u)$$

est une martingale.

Cette hypothèse entraîne un certain nombre de conséquences intéressantes. En effet, la propriété de martingale sous  $\mathbf{P}^*$  donne, en utilisant l'égalité  $P(u, u) = 1$  :

$$\tilde{P}(t, u) = \mathbf{E}^* \left( \tilde{P}(u, u) \middle| \mathcal{F}_t \right) = \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_0^u r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

et, en supprimant l'actualisation,

$$P(t, u) = \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_t^u r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (6.2)$$

Cette égalité, qu'il est intéressant de comparer à la formule (6.1), montre que les prix  $P(t, u)$  ne dépendent que du comportement du processus  $(r(s))_{0 \leq s \leq T}$  sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ . L'hypothèse que nous avons faite sur la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  permet de préciser la forme de la densité de la probabilité  $\mathbf{P}^*$  par rapport à  $\mathbf{P}$ . Notons  $L_T$  cette densité. Pour toute variable aléatoire positive  $X$ , on a :  $\mathbf{E}^*(X) = \mathbf{E}(XL_T)$  et, si  $X$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable :  $\mathbf{E}^*(X) = \mathbf{E}(XL_t)$ , en posant  $L_t = \mathbf{E}(L_T | \mathcal{F}_t)$ . La variable aléatoire  $L_t$  est donc la densité de la restriction de  $\mathbf{P}^*$  à  $\mathcal{F}_t$  par rapport à  $\mathbf{P}$ .

**Proposition 1.1** *Il existe un processus adapté  $(q(t))_{0 \leq t \leq T}$  tel que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

$$L_t = \exp \left( \int_0^t q(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t q(s)^2 ds \right) \quad p.s. \quad (6.3)$$

**Démonstration :** Le processus  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale par rapport à  $(\mathcal{F}_t)$ , qui est la filtration naturelle du mouvement brownien  $(W_t)$ . Il en résulte (cf. paragraphe 2.3 du chapitre 4) qu'il existe un processus adapté  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  vérifiant  $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$  p.s. et, pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$L_t = L_0 + \int_0^t H_s dW_s \quad \text{p.s.}$$

Puisque  $L_T$  est une densité de probabilité, on a  $\mathbf{E}(L_T) = 1 = L_0$  et, puisque  $\mathbf{P}^*$  est équivalente à  $\mathbf{P}$ , on a  $L_T > 0$  p.s. et plus généralement  $\mathbf{P}(L_t > 0) = 1$  quel que soit  $t$ . Pour obtenir la formule (6.3), on est tenté d'appliquer la formule d'Ito avec la fonction log. Pour cela, on a besoin de vérifier que  $\mathbf{P}(\forall t \in [0, T], L_0 + \int_0^t H_s dW_s > 0) = 1$ . Cette vérification (qui utilise de manière cruciale la propriété de martingale) fait l'objet de l'exercice 30. Ce point étant acquis, la formule d'Ito donne :

$$\log(L_t) = \int_0^t \frac{1}{L_s} H_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{L_s^2} H_s^2 ds \quad \text{p.s.}$$

ce qui entraîne l'égalité (6.3) avec  $q(t) = \frac{H_t}{L_t}$ . ■

**Corollaire 1.2** *Le prix à l'instant  $t$  de l'obligation zéro-coupon d'échéance  $u \geq t$  peut s'écrire :*

$$P(t, u) = \mathbf{E} \left( e^{-\int_t^u r(s) ds + \int_t^u q(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^u q(s)^2 ds} \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (6.4)$$

**Démonstration :** Cela résulte immédiatement de la proposition 1.1 et de la formule suivante, facile à vérifier pour toute variable aléatoire positive  $X$  :

$$\mathbf{E}^*(X | \mathcal{F}_t) = \frac{\mathbf{E}(XL_T | \mathcal{F}_t)}{L_t}. \quad (6.5)$$

La proposition suivante permet de donner une interprétation économique du processus  $(q(t))$  (cf. remarque 1.4 ci-dessous).

**Proposition 1.3** *Pour chaque échéance  $u$ , il existe un processus adapté  $(\sigma_t^u)_{0 \leq t \leq u}$  tel que, sur  $[0, u]$  :*

$$\frac{dP(t, u)}{P(t, u)} = (r(t) - \sigma_t^u q(t)) dt + \sigma_t^u dW_t \quad (6.6)$$

**Démonstration :** Puisque le processus  $(\tilde{P}(t, u))_{0 \leq t \leq u}$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ ,  $(\tilde{P}(t, u)L_t)_{0 \leq t \leq u}$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$  (cf. exercice 31). De plus, on a :  $\tilde{P}(t, u)L_t > 0$  p.s., pour tout  $t \in [0, u]$ . Alors, par le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 1.1, on voit qu'il existe un processus adapté  $(\theta_t^u)_{0 \leq t \leq u}$  tel que  $\int_0^u (\theta_t^u)^2 dt < \infty$  et :

$$\tilde{P}(t, u)L_t = \tilde{P}(0, u) e^{\int_0^t \theta_s^u dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta_s^u)^2 ds}.$$

D'où, en explicitant  $L_t$  et en supprimant l'actualisation :

$$P(t, u) = P(0, u) \exp \left( \int_0^t r(s) ds + \int_0^t (\theta_s^u - q(s)) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t ((\theta_s^u)^2 - q(s)^2) ds \right).$$

En appliquant la formule d'Ito avec la fonction exponentielle, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{dP(t, u)}{P(t, u)} &= r(t)dt + (\theta_t^u - q(t))dW_t - \frac{1}{2}((\theta_t^u)^2 - q(t)^2)dt + \frac{1}{2}(\theta_t^u - q(t))^2dt \\ &= (r(t) + q(t)^2 - \theta_t^u q(t))dt + (\theta_t^u - q(t))dW_t,\end{aligned}$$

ce qui donne l'égalité (6.6) en posant :  $\sigma_t^u = \theta_t^u - q(t)$ . ■

**Remarque 1.4** La formule (6.6) est à rapprocher de l'égalité  $\frac{dS_t^0}{S_t^0} = r(t)dt$ , vérifiée par l'actif dit "sans risque". C'est la présence du terme en  $dW_t$  qui rend les obligations plus risquées. De plus, pour l'intuition, l'expression  $r(t) - \sigma_t^u q(t)$  apparaît comme le rendement moyen (i.e. en espérance) de l'obligation à l'instant  $t$  (car les accroissements du mouvement brownien sont de moyenne nulle) et l'expression  $-\sigma_t^u q(t)$  exprime la différence entre le rendement moyen de l'obligation et le taux sans risque. D'où l'interprétation de  $-q(t)$  comme une "prime de risque". Sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ , le processus  $(\tilde{W}_t)$  défini par :  $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t q(s)ds$  est un mouvement brownien standard (théorème de Girsanov) et on a :

$$\frac{dP(t, u)}{P(t, u)} = r(t)dt + \sigma_t^u d\tilde{W}_t. \quad (6.7)$$

Pour cette raison la probabilité  $\mathbf{P}^*$  est souvent appelée probabilité corrigée du risque ou probabilité "risque-neutre".

### 1.3 Options sur obligations

Pour fixer les idées, considérons d'abord une option européenne d'échéance  $\theta$  sur l'obligation zéro-coupon d'échéance égale à l'horizon  $T$ . S'il s'agit d'un call de prix d'exercice  $K$ , la valeur de l'option à l'instant  $\theta$  est évidemment  $(P(\theta, T) - K)_+$  et on peut espérer couvrir ce call avec un portefeuille constitué de certaines quantités d'actif sans risque et d'obligations. Pour préciser cela, nous allons définir des stratégies de gestion, en nous limitant à des portefeuilles constitués, à chaque instant, d'actifs sans risque et de zéro-coupons d'échéance  $T$ . Une stratégie est alors définie par la donnée d'un processus adapté  $((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ ,  $H_t^0$  représentant la quantité d'actif sans risque et  $H_t$  le nombre d'obligations d'échéance  $T$  détenues en portefeuille à l'instant  $t$ . La valeur du portefeuille à l'instant  $t$  est donnée par :

$$V_t = H_t^0 S_t^0 + H_t P(t, T) = H_t^0 e^{\int_0^t r(s)ds} + H_t P(t, T)$$

et la condition d'autofinancement s'écrit, comme dans le chapitre 4, sous la forme :

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dP(t, T).$$

Pour que cette égalité ait un sens, on impose, compte tenu de la proposition 1.3, les conditions d'intégrabilité suivantes :  $\int_0^T |H_t^0 r(t)|dt < \infty$  et  $\int_0^T (H_t \sigma_t^u)^2 dt < \infty$  p.s.. Comme dans le chapitre 4, nous définissons les stratégies admissibles de la façon suivante :

**Définition 1.5** Une stratégie  $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$  est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée  $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \tilde{P}(t, T)$  du portefeuille correspondant est, pour tout  $t$ , positive et si  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  est de carré intégrable sous  $\mathbf{P}^*$ .

La proposition suivante montre que sous des hypothèses convenables, on peut couvrir toutes les options européennes d'échéance  $\theta < T$ .



**Proposition 1.6** *On suppose  $\sup_{0 \leq t \leq T} |r(t)| < \infty$  p.s. et  $\sigma_t^\top \neq 0$  p.s., pour tout  $t \in [0, \theta]$ . Soit  $\theta < T$  et soit  $h$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_\theta$  mesurable telle que  $he^{-\int_0^\theta r(s)ds}$  soit de carré intégrable sous  $\mathbf{P}^*$ . Alors, il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant  $\theta$  est égale à  $h$ . La valeur à un instant  $t \leq \theta$  d'une telle stratégie est donnée par :*

$$V_t = \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_t^\theta r(s)ds} h \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

**Démonstration :** La méthode est la même que dans le chapitre 4. On observe d'abord que si  $\tilde{V}_t$  est la valeur (actualisée) à l'instant  $t$  d'une stratégie admissible  $((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$ , on a, en utilisant la condition d'autofinancement, la formule d'intégration par parties et la remarque 1.4 (cf. équation (6.7)) :

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= H_t d\tilde{P}(t, T) \\ &= H_t \tilde{P}(t, T) \sigma_t^\top d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

On en déduit, compte tenu du fait que  $\sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t$  est de carré intégrable sous  $\mathbf{P}^*$ , que  $(\tilde{V}_t)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ . On a donc :

$$\forall t \leq \theta \quad \tilde{V}_t = \mathbf{E}^* \left( \tilde{V}_\theta \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

et, si on impose la condition  $V_\theta = h$ , on obtient

$$V_t = e^{\int_0^t r(s)ds} \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta r(s)ds} h \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Pour achever la démonstration, il suffit de construire une stratégie admissible ayant à chaque instant cette valeur. Pour cela, on montre qu'il existe un processus  $(J_t)_{0 \leq t \leq \theta}$  tel que  $\int_0^\theta J_t^2 < \infty$ , p.s. et :

$$he^{-\int_0^\theta r(s)ds} = \mathbf{E}^* \left( he^{-\int_0^\theta r(s)ds} \right) + \int_0^\theta J_s d\tilde{W}_s.$$

Noter que cette propriété n'est pas une conséquence triviale du théorème de représentation des martingales car on ne sait pas si  $he^{-\int_0^\theta r(s)ds}$  est dans la tribu engendrée par les  $\tilde{W}_t$ ,  $t \leq \theta$  (on sait seulement qu'elle est dans la tribu  $\mathcal{F}_\theta$  qui peut être plus grande ; voir à ce sujet l'exercice 32). Ce point étant acquis, il suffit de poser :

$$H_t = \frac{J_t}{\tilde{P}(t, T) \sigma_t^\top} \quad \text{et} \quad H_t^0 = \mathbf{E}^* \left( he^{-\int_0^\theta r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right) - \frac{J_t}{\sigma_t^\top}$$

pour  $t \leq \theta$ . On vérifie aisément que  $((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq \theta}$  définit une stratégie admissible (l'hypothèse  $\sup_{0 \leq t \leq T} |r(t)| < \infty$  p.s. permet d'assurer la condition  $\int_0^\theta |r(s)H_s^0| ds < \infty$ ) dont la valeur à l'instant  $\theta$  est bien égale à  $h$ . ■

**Remarque 1.7** Nous ne nous sommes pas posés la question de l'unicité de la probabilité  $\mathbf{P}^*$  et il n'est pas clair que le processus de risque  $(q(t))$  soit défini sans ambiguïté. En fait, on peut montrer (cf. [AD89]) que  $\mathbf{P}^*$  est l'unique probabilité équivalente à  $\mathbf{P}$  sous laquelle  $(\tilde{P}(t, T))_{0 \leq t \leq T}$  soit une martingale si et seulement si le processus  $(\sigma_t^\top)$  vérifie :  $\sigma_t^\top \neq 0$ ,  $dt d\mathbf{P}$  presque partout. Cette condition, un peu plus faible que l'hypothèse de la proposition 1.6, est exactement ce qu'il faut pour pouvoir couvrir les options avec des obligations d'échéance  $T$ , ce qui n'est pas étonnant si l'on songe à la caractérisation des marchés complets que nous avons donnée dans le chapitre 1.

## 2 Quelques modèles usuels

Les équations (6.2) et (6.4) montrent que pour calculer le prix des obligations, on a besoin de connaître soit l'évolution de  $r(t)$  sous  $\mathbf{P}^*$ , soit l'évolution du couple  $(r(t), q(t))$  sous  $\mathbf{P}$ . Les premiers modèles que nous allons examiner décrivent l'évolution de  $r(t)$  sous  $\mathbf{P}$  par une équation de diffusion et choisissent la forme de  $q(t)$  de façon à conserver le même type d'équation sous  $\mathbf{P}^*$ . Les prix des obligations et des options dépendent alors explicitement de "paramètres de risque" difficiles à estimer. Une des vertus du modèle de Heath-Jarrow-Morton, que nous présentons brièvement dans le paragraphe 2.3 est de fournir des formules de prix d'options dépendant uniquement de paramètres régissant l'évolution des taux sous  $\mathbf{P}$ .

### 2.1 Le modèle de Vasicek

Dans ce modèle, on suppose que le processus  $r(t)$  vérifie :

$$dr(t) = a(b - r(t)) dt + \sigma dW_t \quad (6.8)$$

où  $a, b, \sigma$  sont des constantes positives. On suppose aussi que le processus  $q(t)$  est une constante  $q(t) = -\lambda$ , avec  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Alors :

$$dr(t) = a(b^* - r(t)) dt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (6.9)$$

où  $b^* = b - \lambda\sigma/a$  et  $\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$ . Avant de calculer le prix des obligations selon ce modèle, donnons quelques conséquences de l'équation (6.8). Si on pose :

$$X_t = r(t) - b,$$

on voit que  $(X_t)$  est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t,$$

ce qui signifie que  $(X_t)$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (cf. chapitre 3, paragraphe 5.2). On en déduit que  $r(t)$  peut s'écrire :

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \quad (6.10)$$

et que  $r(t)$  suit une loi normale dont la moyenne est donnée par  $\mathbf{E}(r(t)) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at})$  et la variance par  $\text{Var}(r(t)) = \sigma^2 \left( \frac{1 - e^{-2at}}{2a} \right)$ . Cela entraîne que  $\mathbf{P}(r(t) < 0) > 0$ , ce qui pour la pratique n'est pas très satisfaisant (sauf si cette probabilité reste très faible). Noter que, quand  $t$  tend vers l'infini,  $r(t)$  converge en loi vers une gaussienne de moyenne  $b$  et de variance  $\frac{\sigma^2}{2a}$ .

Pour calculer le prix des zéro-coupons, on se place sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$  et on utilise l'équation (6.9). D'après l'égalité (6.2),

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_t^T r(s) ds} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-b^*(T-t)} \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_t^T X_s^* ds} \middle| \mathcal{F}_t \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

en posant :  $X_t^* = r(t) - b^*$ . Comme  $(X_t^*)$  est solution de l'équation de diffusion à coefficients indépendants du temps

$$dX_t^* = -aX_t^* dt + \sigma d\tilde{W}_t, \quad (6.12)$$

on peut écrire :

$$\mathbf{E}^* \left( e^{-\int_t^T X_s^* ds} \middle| \mathcal{F}_t \right) = F(T-t, X_t^*) = F(T-t, r(t) - b^*) \quad (6.13)$$

où  $F$  est la fonction définie par :  $F(\theta, x) = \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta X_s^x ds} \right)$ ,  $(X_t^x)$  étant l'unique solution de l'équation (6.12) qui vérifie :  $X_0^x = x$  (cf. chapitre 3, remarque 5.11).

Le calcul de  $F(\theta, x)$  peut se faire complètement. En effet, on sait (cf. chapitre 3) que le processus  $(X_t^x)$  est gaussien, à trajectoires continues. Il en résulte que  $\int_0^\theta X_s^x ds$  est une gaussienne, puisque l'intégrale est limite de sommes de Riemann, qui sont gaussiennes. On a donc, d'après l'expression de la transformée de Laplace d'une gaussienne,

$$\mathbf{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta X_s^x ds} \right) = e^{-\mathbf{E}^* \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) + \frac{1}{2} \text{Var} \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right)}.$$

De l'égalité :  $\mathbf{E}^*(X_s^x) = xe^{-as}$ , on déduit :

$$\mathbf{E}^* \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) = x \frac{1 - e^{-a\theta}}{a}.$$

Pour le calcul de la variance, on écrit :

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) &= \text{Cov} \left( \int_0^\theta X_s^x ds, \int_0^\theta X_s^x ds \right) \\ &= \int_0^\theta \int_0^\theta \text{Cov} (X_t^x, X_u^x) du dt. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Puisque  $X_t^x = xe^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} d\tilde{W}_s$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{Cov} (X_t^x, X_u^x) &= \sigma^2 e^{-a(t+u)} \mathbf{E}^* \left( \int_0^t e^{as} d\tilde{W}_s \int_0^u e^{as} d\tilde{W}_s \right) \\ &= \sigma^2 e^{-a(t+u)} \int_0^{t \wedge u} e^{2as} ds \\ &= \sigma^2 e^{-a(t+u)} \frac{(e^{2a(t \wedge u)} - 1)}{2a} \end{aligned}$$

et, en reportant dans l'égalité (6.14),

$$\text{Var} \left( \int_0^\theta X_s^x ds \right) = \frac{\sigma^2 \theta}{a^2} - \frac{\sigma^2}{a^3} (1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a\theta})^2.$$

En revenant aux équations (6.11) et (6.13), on obtient la formule suivante :

$$P(t, T) = \exp [-(T-t)R(T-t, r(t))],$$

où  $R(T-t, r(t))$ , qui s'interprète comme le taux d'intérêt moyen sur la période  $[t, T]$ , est donné par la formule :

$$R(\theta, r) = R_\infty - \frac{1}{a\theta} \left[ (R_\infty - r) (1 - e^{-a\theta}) - \frac{\sigma^2}{4a^2} (1 - e^{-a\theta})^2 \right]$$

avec  $R_\infty = \lim_{\theta \rightarrow \infty} R(\theta, r) = b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2}$ . Le taux  $R_\infty$  s'interprète comme un taux à long terme ; notons qu'il ne dépend pas du "taux instantané spot"  $r$ . Cette dernière propriété est considérée comme un défaut du modèle par les financiers.

**Remarque 2.1** Dans la pratique, se pose le problème de l'estimation des paramètres et du choix de la valeur de  $r$ . Pour  $r$  on choisira un taux court (par exemple le taux au jour le jour ou "jj"), on pourra alors caler les paramètres  $b$ ,  $a$ ,  $\sigma$  par des méthodes statistiques sur les données historiques du taux instantané. Puis on détermine  $\lambda$  à partir des données de marché en inversant la formule de Vasicek. En fait les praticiens déterminent souvent les paramètres, y compris  $r$ , en ajustant au mieux la formule de Vasicek sur les données de marché.

**Remarque 2.2** Le calcul des options sur obligations se fait facilement dans le modèle de Vasicek, grâce au caractère gaussien du processus d'Ornstein-Uhlenbeck (cf. exercice 33).

## 2.2 Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross

Dans [CIR85], Cox, Ingersoll et Ross proposent de modéliser l'évolution du taux instantané par l'équation suivante :

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW_t \quad (6.15)$$

avec  $\sigma$  et  $a$  positifs,  $b \in \mathbf{R}$ , le processus  $(q(t))$  étant pris de la forme :  $q(t) = -\alpha\sqrt{r(t)}$ , avec  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Notons qu'on ne peut pas appliquer à cette équation le théorème d'existence et d'unicité que nous avons donné au chapitre 3, puisque la fonction racine carrée n'est définie que sur  $\mathbf{R}_+$  et n'est pas lipschitzienne. Cependant, grâce au caractère hölderien de la fonction racine carrée, on peut montrer le résultat suivant.

**Théorème 2.3** *On suppose que  $(W_t)$  est un mouvement brownien standard défini sur  $[0, \infty[$ . Pour tout réel  $x \geq 0$ , il existe un unique processus continu adapté  $(X_t)$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$ , vérifiant  $X_0 = x$  et*

$$dX_t = (a - bX_t) dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t \quad \text{sur } [0, \infty[. \quad (6.16)$$

Pour une démonstration de ce résultat, nous renvoyons à [IW81], p. 221. Pour permettre l'étude du modèle de Cox-Ingersoll-Ross, nous allons donner quelques propriétés de cette équation. Nous noterons  $(X_t^x)$  la solution de (6.16) issue de  $x$  et  $\tau_0^x$  le temps d'arrêt défini par :

$$\tau_0^x = \inf\{t \geq 0 | X_t^x = 0\}$$

avec, comme d'habitude,  $\inf \emptyset = \infty$ .

**Proposition 2.4** 1. Si  $a \geq \sigma^2/2$ , on a  $\mathbf{P}(\tau_0^x = \infty) = 1$ , pour tout  $x > 0$ .

2. Si  $0 \leq a < \sigma^2/2$  et  $b \geq 0$ , on a  $\mathbf{P}(\tau_0^x < \infty) = 1$ , pour tout  $x > 0$ .

3. Si  $0 \leq a < \sigma^2/2$  et  $b < 0$ , on a  $\mathbf{P}(\tau_0^x < \infty) \in ]0, 1[$ , pour tout  $x > 0$ .

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 34.

La proposition suivante, qui permet de caractériser la loi du couple  $(X_t^x, \int_0^t X_s^x ds)$ , est la clé de tous les calculs de prix dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross.

**Proposition 2.5** *Pour tous réels positifs  $\lambda$  et  $\mu$ , on a :*

$$\mathbf{E} \left( e^{-\lambda X_t^x} e^{-\mu \int_0^t X_s^x ds} \right) = e^{-a\phi_{\lambda, \mu}(t)} e^{-x\psi_{\lambda, \mu}(t)},$$

où les fonctions  $\phi_{\lambda,\mu}$  et  $\psi_{\lambda,\mu}$  sont données par :

$$\phi_{\lambda,\mu}(t) = -\frac{2}{\sigma^2} \log \left( \frac{2\gamma e^{\frac{t(\gamma+b)}{2}}}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t} - 1) + \gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)} \right)$$

et

$$\psi_{\lambda,\mu}(t) = \frac{\lambda(\gamma + b + e^{\gamma t}(\gamma - b)) + 2\mu(e^{\gamma t} - 1)}{\sigma^2\lambda(e^{\gamma t} - 1) + \gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)}$$

avec  $\gamma = \sqrt{b^2 + 2\sigma^2\mu}$ .

**Démonstration :** Le fait que l'espérance à calculer puisse se mettre sous la forme  $e^{-\alpha\phi(t) - x\psi(t)}$  résulte d'une propriété d'additivité du processus  $(X_t^x)$  par rapport au paramètre  $\alpha$  et à la condition initiale  $x$  (cf. [IW81], p.225, [RY90]). Si, fixant  $\lambda$  et  $\mu$ , on considère la fonction  $F(t, x)$  définie par :

$$F(t, x) = \mathbf{E} \left( e^{-\lambda X_t^x} e^{-\mu \int_0^t X_s^x ds} \right), \quad (6.17)$$

il est naturel de chercher  $F$  comme solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} x \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (\alpha - bx) \frac{\partial F}{\partial x} - \mu x F \\ F(0, x) = e^{-\lambda x} \end{cases}$$

En effet, si  $F$  vérifie ces équations et a des dérivées bornées, la formule d'Itô montre que, pour tout  $T$ , le processus  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ , défini par :

$$M_t = e^{-\mu \int_0^t X_s^x ds} F(T - t, X_t^x)$$

est une martingale et l'égalité  $\mathbf{E}(M_T) = M_0$  donne (6.17). Si  $F$  est de la forme :  $F(t, x) = e^{-\alpha\phi(t) - x\psi(t)}$  les équations ci-dessus se traduisent par :  $\phi(0) = 0$ ,  $\psi(0) = \lambda$  et

$$\begin{cases} -\psi'(t) = \frac{\sigma^2}{2} \psi^2(t) + b\psi(t) - \mu \\ \phi'(t) = \psi(t) \end{cases}$$

La résolution de ces deux équations différentielles donne les expressions de  $\phi$  et  $\psi$ . ■

Quand on applique la proposition 2.5 avec  $\mu = 0$ , on obtient la transformée de Laplace de  $X_t^x$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( e^{-\lambda X_t^x} \right) &= \left( \frac{b}{\frac{\sigma^2}{2} \lambda (1 - e^{-bt}) + b} \right)^{2\alpha/\sigma^2} \exp \left( -x \frac{\lambda b e^{-bt}}{\lambda \frac{\sigma^2}{2} (1 - e^{-bt}) + b} \right) \\ &= \frac{1}{(2\lambda L + 1)^{2\alpha/\sigma^2}} \exp \left( -\frac{\lambda L \zeta}{2\lambda L + 1} \right) \end{aligned}$$

en posant :  $L = \frac{\sigma^2}{4b} (1 - e^{-bt})$  et  $\zeta = \frac{4xb}{\sigma^2(e^{bt}-1)}$ . Avec ces notations, la transformée de Laplace de  $X_t^x/L$  est donnée par la fonction  $g_{4\alpha/\sigma^2, \zeta}$ , où  $g_{\delta, \zeta}$  est définie par :

$$g_{\delta, \zeta}(\lambda) = \frac{1}{(2\lambda + 1)^{\delta/2}} \exp \left( -\frac{\lambda \zeta}{2\lambda + 1} \right).$$

Cette fonction est la transformée de Laplace d'une loi connue sous le nom de loi du chi-deux décentrée à  $\delta$  degrés de liberté, de paramètre de décentrage  $\zeta$  (voir à ce sujet l'exercice 35). La densité de cette loi est donnée par la fonction  $f_{\delta,\zeta}$ , définie par :

$$f_{\delta,\zeta}(x) = \frac{e^{-\zeta/2}}{2\zeta^{\frac{\delta}{4}-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\delta}{4}-\frac{1}{2}} I_{\frac{\delta}{2}-1}(\sqrt{x\zeta}) \quad \text{pour } x > 0,$$

où  $I_\nu$  est la fonction de Bessel modifiée d'ordre  $\nu$ , définie par :

$$I_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}.$$

On trouvera de nombreuses propriétés des fonctions de Bessel et des formules d'approximation des fonctions de répartition de lois du chi-deux décentrées dans [AS70], chapitres 9 et 26.

Revenons maintenant au modèle de Cox-Ingersoll-Ross. Avec les hypothèses faites sur les processus  $(r(t))$  et  $(q(t))$ , on a :

$$dr(t) = (a - (b + \sigma\alpha)r(t)) dt + \sigma\sqrt{r(t)}d\tilde{W}_t,$$

où, sous la probabilité  $\mathbf{P}^*$ , le processus  $(\tilde{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement brownien standard. Le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$  est alors donné, à l'instant 0, par :

$$\begin{aligned} P(0, T) &= \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_0^T r(s) ds} \right) \\ &= e^{-\alpha\phi(T) - r(0)\psi(T)} \end{aligned} \quad (6.18)$$

où les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont données par les formules suivantes :

$$\phi(t) = -\frac{2}{\sigma^2} \log \left( \frac{2\gamma^* e^{\frac{t(\gamma^* + b^*)}{2}}}{\gamma^* - b^* + e^{\gamma^* t}(\gamma^* + b^*)} \right)$$

et

$$\psi(t) = \frac{2(e^{\gamma^* t} - 1)}{\gamma^* - b^* + e^{\gamma^* t}(\gamma^* + b^*)}$$

avec  $b^* = b + \sigma\alpha$  et  $\gamma^* = \sqrt{(b^*)^2 + 2\sigma^2}$ . Le prix à l'instant  $t$  est donné par :  $P(t, T) = \exp(-\alpha\phi(T-t) - r(t)\psi(T-t))$ .

Calculons maintenant le prix, à l'instant 0, d'un call européen d'échéance  $\theta$ , de prix d'exercice  $K$ , sur un zéro-coupon d'échéance  $T$ . On peut montrer que les hypothèses de la proposition 1.6 sont vérifiées ; le prix à l'instant 0 du call est donc donné par :

$$\begin{aligned} C_0 &= \mathbf{E}^* \left[ e^{-\int_0^\theta r(s) ds} (P(\theta, T) - K)_+ \right] \\ &= \mathbf{E}^* \left[ e^{-\int_0^\theta r(s) ds} \left( e^{-\alpha\phi(T-\theta) - r(\theta)\psi(T-\theta)} - K \right)_+ \right] \\ &= \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta r(s) ds} P(\theta, T) \mathbf{1}_{\{r(\theta) < r^*\}} \right) \\ &\quad - K \mathbf{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta r(s) ds} \mathbf{1}_{\{r(\theta) < r^*\}} \right) \end{aligned}$$

où  $r^*$  est défini par :

$$r^* = -\frac{\alpha\phi(T-\theta) + \log(K)}{\psi(T-\theta)}.$$

Remarquons que  $\mathbf{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta r(s) ds} P(\theta, T) \right) = P(0, T)$ , par la propriété de martingale des prix actualisés. De même,  $\mathbf{E}^* \left( e^{-\int_0^\theta r(s) ds} \right) = P(0, \theta)$ . On peut donc écrire le prix de l'option sous la forme :

$$C_0 = P(0, T) \mathbf{P}_1(r(\theta) < r^*) - KP(0, \theta) \mathbf{P}_2(r(\theta) < r^*)$$

en notant  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  les probabilités dont les densités par rapport à  $\mathbf{P}^*$  sont données respectivement par :

$$\frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^\theta r(s) ds} P(\theta, T)}{P(0, T)} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^\theta r(s) ds}}{P(0, \theta)}.$$

On démontre (cf. exercice 36) que, si on pose

$$L_1 = \frac{\sigma^2}{2} \frac{(e^{\gamma^* \theta} - 1)}{\gamma^* (e^{\gamma^* \theta} + 1) + (\sigma^2 \psi(T - \theta) + b^*) (e^{\gamma^* \theta} - 1)}$$

et

$$L_2 = \frac{\sigma^2}{2} \frac{(e^{\gamma^* \theta} - 1)}{\gamma^* (e^{\gamma^* \theta} + 1) + b^* (e^{\gamma^* \theta} - 1)},$$

la loi de  $\frac{r(\theta)}{L_1}$  sous  $\mathbf{P}_1$ , (resp. de  $\frac{r(\theta)}{L_2}$  sous  $\mathbf{P}_2$ ) est une loi du chi-deux décentrée à  $4a/\sigma^2$  degrés de liberté et de paramètre de décentrage égal à  $\zeta_1$  (resp.  $\zeta_2$ ), avec

$$\zeta_1 = \frac{8r(0)\gamma^{*2}e^{\gamma^* \theta}}{\sigma^2 (e^{\gamma^* \theta} - 1) (\gamma^* (e^{\gamma^* \theta} + 1) + (\sigma^2 \psi(T - \theta) + b^*) (e^{\gamma^* \theta} - 1))}$$

et

$$\zeta_2 = \frac{8r(0)\gamma^{*2}e^{\gamma^* \theta}}{\sigma^2 (e^{\gamma^* \theta} - 1) (\gamma^* (e^{\gamma^* \theta} + 1) + b^* (e^{\gamma^* \theta} - 1))}.$$

Avec ces notations, en introduisant la fonction de répartition  $F_{\delta, \zeta}$  de la loi du chi-deux décentrée à  $\delta$  degrés de liberté de paramètre de décentrage  $\zeta$ , on a donc :

$$C_0 = P(0, T) F_{4a/\sigma^2, \zeta_1} \left( \frac{r^*}{L_1} \right) - KP(0, \theta) F_{4a/\sigma^2, \zeta_2} \left( \frac{r^*}{L_2} \right).$$

### 2.3 Autres modèles

Le modèle de Vasicek et le modèle de Cox-Ingersoll-Ross ont pour principal défaut de donner des prix qui sont des fonctions explicites du taux d'intérêt instantané "spot" et ne permettent donc pas d'intégrer, dans la structure des prix, l'observation de toute la courbe des taux.

Certains auteurs ont introduit des modèles bidimensionnels pour mieux rendre compte des disparités entre taux court et taux long (cf. [BS79], [SS84], [Cou82]). Ces modèles plus complexes ne débouchent pas sur des formules explicites et nécessitent la résolution d'équations aux dérivées partielles. Plus récemment, Ho et Lee [HL86] ont proposé un modèle à temps discret décrivant l'évolution de l'ensemble de la courbe des taux. Un modèle à temps continu basé sur la même idée a été introduit par Heath, Jarrow et Morton dans [HJM87], [Mor89]. C'est ce modèle que nous allons présenter brièvement.

On définit tout d'abord les taux d'intérêt *forward*  $f(t, s)$ , pour  $t \leq s$ , caractérisés par l'égalité suivante :

$$P(t, u) = \exp \left( - \int_t^u f(t, s) ds \right) \quad (6.19)$$

pour toute échéance  $u$ . Le nombre  $f(t, s)$  représente donc le taux d'intérêt instantané à la date  $s$  tel que le marché "le voit" à la date  $t$ . Pour chaque  $u$ , le processus  $(f(t, u))_{0 \leq t \leq u}$  doit donc être un processus adapté et il est naturel de poser :  $f(t, t) = r(t)$ . On impose également à l'application  $(t, s) \mapsto f(t, s)$ , définie pour  $t \leq s$ , d'être continue. La modélisation consiste ensuite à supposer que, pour chaque échéance  $u$ , le processus  $(f(t, u))_{0 \leq t \leq u}$  vérifie une équation de la forme :

$$f(t, u) = f(0, u) + \int_0^t \alpha(v, u) dv + \int_0^t \sigma(f(v, u)) dW_v, \quad (6.20)$$

avec un processus  $(\alpha(t, u))_{0 \leq t \leq u}$  adapté, l'application  $(t, u) \mapsto \alpha(t, u)$  étant continue et  $\sigma$  étant une application continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  (on peut aussi prendre  $\sigma$  dépendant du temps, cf. [Mor89]).

Il faut alors s'assurer que ce modèle est compatible avec l'hypothèse (H). Cela impose des conditions sur les coefficients  $\alpha$  et  $\sigma$  du modèle. Pour les faire apparaître, on calcule la différentielle  $\frac{dP(t, u)}{P(t, u)}$  et on la compare à l'équation (6.6). Posons :  $X_t = -\int_t^u f(t, s) ds$ . On a  $P(t, u) = e^{X_t}$  et, d'après l'équation (6.20),

$$\begin{aligned} X_t &= \int_t^u (-f(s, s) + f(s, s) - f(t, s)) ds \\ &= -\int_t^u f(s, s) ds + \int_t^u \left( \int_t^s \alpha(v, s) dv \right) ds + \int_t^u \left( \int_t^s \sigma(f(v, s)) dW_v \right) ds \\ &= -\int_t^u f(s, s) ds + \int_t^u \left( \int_v^u \alpha(v, s) ds \right) dv + \int_t^u \left( \int_v^u \sigma(f(v, s)) ds \right) dW_v \quad (6.21) \\ &= X_0 + \int_0^t f(s, s) ds - \int_0^t \left( \int_v^u \alpha(v, s) ds \right) dv - \int_0^t \left( \int_v^u \sigma(f(v, s)) ds \right) dW_v. \end{aligned}$$

Noter que l'interversion d'intégrales apparaissant dans l'équation (6.21) est justifiée par l'exercice 37. On a donc :

$$dX_t = \left( f(t, t) - \int_t^u \alpha(t, s) ds \right) dt - \left( \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds \right) dW_t$$

et, par la formule d'Ito :

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, u)}{P(t, u)} &= dX_t + \frac{1}{2} d \langle X, X \rangle_t \\ &= \left( f(t, t) - \left( \int_t^u \alpha(t, s) ds \right) + \frac{1}{2} \left( \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds \right)^2 \right) dt \\ &\quad - \left( \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds \right) dW_t. \end{aligned}$$

Si l'hypothèse (H) est vérifiée, on doit avoir, d'après la proposition 1.3 et l'égalité  $f(t, t) = r(t)$ ,

$$\sigma_t^u q(t) = \left( \int_t^u \alpha(t, s) ds \right) - \frac{1}{2} \left( \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds \right)^2,$$

avec  $\sigma_t^u = - \left( \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds \right)$ . D'où :

$$\int_t^u \alpha(t, s) ds = \frac{1}{2} \left( \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds \right)^2 - q(t) \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds$$



et, en dérivant par rapport à  $u$  :

$$\alpha(t, u) = \sigma(f(t, u)) \left( \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds - q(t) \right)$$

L'équation (6.20) s'écrit alors, sous forme différentielle :

$$df(t, u) = \sigma(f(t, u)) \left( \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds \right) dt + \sigma(f(t, u)) d\tilde{W}_t \quad (6.22)$$

Le théorème suivant, dû à Heath, Jarrow et Morton [HJM87], [Mor89] donne des conditions suffisantes pour que l'équation (6.22) ait une solution unique.

**Théorème 2.6** *Si la fonction  $\sigma$  est lipschitzienne et bornée, pour toute fonction continue  $\phi$  de  $[0, T]$  dans  $\mathbf{R}_+$  il existe un unique processus continu à deux indices  $(f(t, u))_{0 \leq t \leq u \leq T}$  tel que, pour tout  $u$ , le processus  $(f(t, u))_{0 \leq t \leq u}$  soit adapté et vérifie (6.22), avec  $f(0, u) = \phi(u)$ .*

On voit que, pour tout processus continu  $(q(t))$ , on peut alors construire un modèle de la forme (6.20). Il suffit de prendre une solution de (6.22) et de poser ensuite :

$$\alpha(t, u) = \sigma(f(t, u)) \left( \int_t^u \sigma(f(t, s)) ds - q(t) \right).$$

Ce qui est remarquable dans ce modèle, c'est que la loi des taux forward sous  $\mathbf{P}^*$  ne dépend que de la fonction  $\sigma$ . C'est une conséquence de l'équation (6.22), qui ne fait apparaître que  $\sigma$  et  $(\tilde{W}_t)$ . Il en résulte que le prix des options ne dépendra que de la fonction  $\sigma$ . On est ainsi dans une situation analogue à celle du modèle de Black-Scholes. Le cas où  $\sigma$  est une constante est étudié dans l'exercice 38. Noter que la condition de bornitude sur  $\sigma$  est essentielle puisque, pour  $\sigma(x) = x$ , il n'y a pas de solution (cf. [HJM87], [Mor89]).

**Remarque bibliographique :** Pour l'évaluation des options sur obligations avec coupons, on pourra consulter [Jam89] et [KR89].

### 3 Exercices

**Exercice 30** Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  une martingale continue telle que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{P}(M_t > 0) = 1$ . On pose :

$$\tau = (\inf\{t \in [0, T] \mid M_t = 0\}) \wedge T.$$

1. Montrer que  $\tau$  est un temps d'arrêt.
2. Montrer, en utilisant le théorème d'arrêt, que  $\mathbf{E}(M_T) = \mathbf{E}(M_T \mathbf{1}_{\{\tau = T\}})$ . En déduire que  $\mathbf{P}(\{\forall t \in [0, T] M_t > 0\}) = 1$ .

**Exercice 31** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé filtré et soit  $\mathbf{Q}$  une probabilité absolument continue par rapport à  $\mathbf{P}$ . On note  $L_t$  la densité de la restriction de  $\mathbf{Q}$  à  $\mathcal{F}_t$ . Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté. Montrer que  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale sous  $\mathbf{Q}$  si et seulement si le processus  $(L_t M_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale sous  $\mathbf{P}$ .

**Exercice 32** Les notations sont celles du paragraphe 1.3. Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ . On suppose que  $(M_t)$  est une martingale sous  $\mathbf{P}^*$ . Montrer, en utilisant l'exercice 31, qu'il existe un processus adapté  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  tel que  $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$  p.s. et

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s d\tilde{W}_s \quad \text{p.s.}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

**Exercice 33** On se propose de calculer le prix, à l'instant 0, d'un call d'échéance  $\theta$  et de prix d'exercice  $K$  sur une obligation zéro-coupon d'échéance  $T > \theta$ , dans le modèle de Vasicek.

1. Montrer que les hypothèses de la proposition 1.6 sont bien vérifiées.
2. Montrer que l'option est exercée si et seulement si  $r(\theta) < r^*$ , où

$$r^* = R_\infty \left( 1 - \frac{\alpha(T-\theta)}{1 - e^{-\alpha(T-\theta)}} \right) - \frac{\sigma^2 (1 - e^{-\alpha(T-\theta)})}{4\alpha^2} - \log(K) \left( \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha(T-\theta)}} \right).$$

3. Soit  $(X, Y)$  un vecteur gaussien à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$  sous une probabilité  $\mathbf{P}$  et soit  $\tilde{\mathbf{P}}$  la probabilité absolument continue par rapport à  $\mathbf{P}$ , de densité

$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \frac{e^{-\lambda X}}{\mathbf{E}(e^{-\lambda X})}.$$

Montrer que, sous  $\tilde{\mathbf{P}}$ ,  $Y$  est une gaussienne, dont on précisera la moyenne et la variance.

4. En utilisant la question précédente, montrer que sous les probabilités de densités respectives  $\frac{e^{-\int_0^\theta r(s) ds}}{P(0, \theta)}$  et  $\frac{e^{-\int_0^T r(s) ds}}{P(0, T)}$  par rapport à  $\mathbf{P}^*$ , la variable aléatoire  $r(\theta)$  est une gaussienne. En déduire une expression du prix de l'option sous la forme  $C_0 = P(0, T)p_1 - KP(0, \theta)p_2$ , avec des paramètres  $p_1$  et  $p_2$  que l'on explicitera.

**Exercice 34** Le but de cet exercice est de démontrer la proposition 2.4. Pour  $x, M > 0$ , on note  $\tau_M^x$  le temps d'arrêt défini par  $\tau_M^x = \inf\{t \geq 0 \mid X_t^x = M\}$ .

1. Soit  $s$  la fonction définie sur  $]0, \infty[$  par

$$s(x) = \int_1^x e^{y \frac{2b}{\sigma^2}} y^{-2a/\sigma^2} dy.$$

Montrer que  $s$  vérifie :  $\frac{\sigma^2}{2} x \frac{d^2 s}{dx^2} + (a - bx) \frac{ds}{dx} = 0$ .

2. Pour  $\varepsilon < x < M$ , on pose :  $\tau_{\varepsilon, M}^x = \tau_\varepsilon^x \wedge \tau_M^x$ . Montrer que, pour tout  $t > 0$ , on a :

$$s(X_{t \wedge \tau_{\varepsilon, M}^x}^x) = s(x) + \int_0^{t \wedge \tau_{\varepsilon, M}^x} s'(X_s^x) \sigma \sqrt{X_s^x} dW_s.$$

En déduire, en prenant les variances et en utilisant le fait que  $s'$  est bornée inférieurement sur l'intervalle  $[\varepsilon, M]$ , que  $\mathbf{E}(\tau_{\varepsilon, M}^x) < \infty$ , ce qui entraîne que  $\tau_{\varepsilon, M}^x$  est fini p.s.

3. Montrer que si  $\varepsilon < x < M$ ,  $s(x) = s(\varepsilon)\mathbf{P}(\tau_\varepsilon^x < \tau_M^x) + s(M)\mathbf{P}(\tau_\varepsilon^x > \tau_M^x)$ .
4. On suppose  $a \geq \sigma^2/2$ . Montrer qu'alors  $\lim_{x \rightarrow 0} s(x) = -\infty$ . En déduire que :

$$\mathbf{P}(\tau_0^x < \tau_M^x) = 0,$$

pour tout  $M > 0$ , puis que  $\mathbf{P}(\tau_0^x < \infty) = 0$ .

5. On suppose maintenant  $0 \leq \alpha < \sigma^2/2$  et on pose  $s(0) = \lim_{x \rightarrow 0} s(x)$ . Montrer que, pour tout  $M > x$ , on a :  $s(x) = s(0)\mathbf{P}(\tau_0^x < \tau_M^x) + s(M)\mathbf{P}(\tau_0^x > \tau_M^x)$  et achever la démonstration de la proposition 2.4.

**Exercice 35** Soit  $d$  un entier strictement positif et soient  $X_1, X_2, \dots, X_d$ ,  $d$  gaussiennes indépendantes de variance 1 et de moyennes respectives  $m_1, m_2, \dots, m_d$ . Montrer que la variable aléatoire  $X = \sum_{i=1}^d X_i^2$  suit une loi du chi-deux décentrée à  $d$  degrés de liberté, de paramètre de décentrage  $\zeta = \sum_{i=1}^d m_i^2$ .

**Exercice 36** En utilisant la proposition 2.5, calculer, dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross, la loi de  $r(\theta)$  sous les probabilités  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  introduites à la fin du paragraphe 2.2.

**Exercice 37** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé filtré et soit  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  un mouvement brownien standard par rapport à  $(\mathcal{F}_t)$ . On considère un processus à deux indices  $(H(t, s))_{0 \leq t, s \leq T}$  vérifiant les propriétés suivantes : pour tout  $\omega$ , l'application  $(t, s) \mapsto H(t, s)(\omega)$  est continue et, pour tout  $s \in [0, T]$ , le processus  $(H(t, s))_{0 \leq t \leq T}$  est adapté. On se propose de justifier l'égalité  $\int_0^T \left( \int_0^T H(t, s) dW_t \right) ds = \int_0^T \left( \int_0^T H(t, s) ds \right) dW_t$ . On supposera pour simplifier que  $\int_0^T \mathbf{E} \left( \int_0^T H^2(t, s) dt \right) ds < \infty$  (ce qui est suffisant pour justifier l'égalité (6.21)).

1. Montrer que

$$\int_0^T \mathbf{E} \left( \left| \int_0^T H(t, s) dW_t \right|^2 \right) ds \leq \int_0^T \left[ \mathbf{E} \left( \int_0^T H^2(t, s) dt \right) \right]^{1/2} ds.$$

En déduire que l'intégrale  $\int_0^T \left( \int_0^T H(t, s) dW_t \right) ds$  a un sens.

2. Soit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  une subdivision de l'intervalle  $[0, T]$ . Remarquer que

$$\int_0^T \left( \sum_{i=0}^{N-1} H(t_i, s) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right) ds = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \int_0^T H(t_i, s) ds \right) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

et justifier le passage à la limite conduisant à l'égalité souhaitée.

**Exercice 38** Dans le modèle de Heath-Jarrow-Morton, on prend pour fonction  $\sigma$  une constante strictement positive, encore notée  $\sigma$ . On se propose de calculer le prix d'un call d'échéance  $\theta$ , de prix d'exercice  $K$ , sur un zéro-coupon d'échéance  $T > \theta$ .

1. Montrer que les hypothèses de la proposition 1.6 sont vérifiées.  
 2. Montrer que la solution de l'équation (6.22) est donnée par  $f(t, u) = f(0, u) + \sigma^2 t \left( u - \frac{t}{2} \right) + \sigma \tilde{W}_t$ . En déduire que

$$P(\theta, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, \theta)} \exp \left( -\sigma(T - \theta) \tilde{W}_\theta - \frac{\sigma^2 \theta T (T - \theta)}{2} \right).$$

3. Calculer, pour  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{E}^* \left( e^{-\sigma \int_0^\theta \tilde{W}_s ds} e^{\lambda \tilde{W}_\theta} \right)$ . En déduire la loi de  $\tilde{W}_\theta$  sous les probabilités  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  de densités par rapport à  $\mathbf{P}^*$  respectivement données par

$$\frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^\theta r(s) ds} P(\theta, T)}{P(0, T)} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}^*} = \frac{e^{-\int_0^\theta r(s) ds}}{P(0, \theta)}.$$

4. Montrer que le prix du call à l'instant 0 est donné par

$$C_0 = P(0, T)N(d) - KP(0, \theta)N(d - \sigma\sqrt{\theta}(T - \theta)),$$

où  $N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$$d = \frac{\sigma\sqrt{\theta}(T - \theta)}{2} - \frac{\log\left(K \frac{P(0, \theta)}{P(0, T)}\right)}{\sigma\sqrt{\theta}(T - \theta)}.$$

# Chapitre 7

## Modèles d'actifs avec sauts

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix de l'action est une fonction continue du temps et cette propriété est une des caractéristiques du modèle. Or, certains événements rares (publication d'un chiffre économique, modification de la conjoncture internationale) peuvent entraîner des variations brutales des cours. Pour modéliser ce genre de phénomènes, on est amené à introduire des processus stochastiques à trajectoires discontinues.

Ces modèles "avec sauts" ont, pour la plupart, une caractéristique marquante qui les différencie du modèle de Black-Scholes : ce sont des modèles de marchés non complets, dans lesquels il n'y a pas de couverture parfaite des options. L'évaluation des options par construction d'un portefeuille simulant n'y est donc plus possible. Une approche possible de l'évaluation et de la couverture des options consiste à définir une notion de risque et à choisir le prix et la couverture de façon à minimiser ce risque.

Dans ce chapitre, nous nous limitons aux modèles avec sauts les plus simples. La description de ces modèles nécessite un exposé des principales propriétés du processus de Poisson, qui fait l'objet du premier paragraphe.

### 1 Processus de Poisson

**Définition 1.1** Soit  $(T_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de loi commune la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , c'est à dire de loi :

$$\mathbf{1}_{\{x > 0\}} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

. On pose  $\tau_n = \sum_{i=1}^n T_i$ . On appelle processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  le processus  $N_t$  défini par :

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t\}} = \sum_{n \geq 1} n \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}}.$$

**Remarque 1.2**  $N_t$  représente le nombre de points de la suite  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  qui sont inférieurs ou égaux à  $t$ . On a :

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0, N_t = n\}.$$

La proposition suivante explicite la loi de  $N_t$  pour un  $t$  fixé.

**Proposition 1.3** Si  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  alors, pour tout  $t > 0$  la variable aléatoire  $N_t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  :

$$\mathbf{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

On a en particulier :

$$\mathbf{E}(N_t) = \lambda t, \quad \text{Var}(N_t) = \mathbf{E}(N_t^2) - (\mathbf{E}(N_t))^2 = \lambda t.$$

De plus, pour  $s > 0$  :

$$\mathbf{E}(s^{N_t}) = \exp\{\lambda t (s - 1)\}.$$

**Démonstration :** On remarque tout d'abord que la loi de  $\tau_n$  est :

$$\mathbf{1}_{\{x > 0\}} \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx.$$

C'est à dire une loi gamma de paramètres  $\lambda$  et  $n$ . En effet, la transformée de Laplace de  $T_1$  est :

$$\mathbf{E} \left( e^{-\alpha T_1} \right) = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha},$$

donc celle de  $\tau_n = T_1 + \dots + T_n$  vaut :

$$\mathbf{E} \left( e^{-\alpha \tau_n} \right) = \mathbf{E} \left( e^{-\alpha T_1} \right)^n = \left( \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \right)^n.$$

On reconnaît la transformée de Laplace de la loi gamma de paramètres  $\lambda$  et  $n$  (cf. [Bou86], chapitre VI, paragraphe 7.12). On a alors, pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_t = n) &= \mathbf{P}(\tau_n \leq t) - \mathbf{P}(\tau_{n+1} \leq t) \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} dx - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} dx \\ &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.4** Soient  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et  $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$ . Le processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, c'est à dire :

- indépendance : si  $s > 0$ ,  $N_{t+s} - N_t$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_t$ .
- stationnarité : la loi de  $N_{t+s} - N_t$  est identique à celle de  $N_s - N_0 = N_s$ .

**Remarque 1.5** Il est facile de voir que les temps de sauts  $\tau_n$  sont des temps d'arrêt. En effet,  $\{\tau_n \leq t\} = \{N_t \geq n\} \in \mathcal{F}_t$ .

Une variable aléatoire  $T$  de loi exponentielle vérifie  $\mathbf{P}(T \geq t+s | T \geq t) = \mathbf{P}(T \geq s)$ . On dit que les variables exponentielles n'ont pas de "mémoire". L'indépendance des accroissements est une conséquence de cette propriété des lois exponentielles.

**Remarque 1.6** La loi d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  est caractérisée par l'une des deux propriétés suivantes :

- $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Markov homogène continu à droite et limité à gauche, tel que :

$$\mathbf{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

- $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, continu à droite, croissant, ne croissant que par sauts de 1.

Pour la première caractérisation, cf. [Bou88], chapitre III, pour la seconde, cf. [DCD83], paragraphe 6.3.

## 2 Description de l'évolution de l'actif risqué

Le but de ce paragraphe est de modéliser un marché financier dans lequel il y a un actif sans risque (de prix  $S_t^0 = e^{rt}$ , à l'instant  $t$ ) et un actif à risque dont le prix présente des sauts de valeurs relatives  $U_1, \dots, U_j, \dots$ , à des instants  $\tau_1, \dots, \tau_j, \dots$  et qui, entre deux instants de saut, suit le modèle de Black et Scholes. Nous supposons de plus que les  $\tau_j$  sont les temps de saut d'un processus de Poisson. Pour préciser cela, plaçons-nous sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  sur lequel sont définis un mouvement brownien standard  $(W_t)_{t \geq 0}$ , un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$   $(N_t)_{t \geq 0}$  et une suite  $(U_j)_{j \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, à valeurs dans  $] -1, +\infty[$ . Nous supposons les tribus engendrées respectivement par  $(W_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $(U_j)_{j \geq 1}$  indépendantes.

Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $\mathcal{F}_t$  la tribu engendrée par les variables aléatoires  $W_s, N_s$  pour  $s \leq t$  et  $U_j \mathbf{1}_{\{j \leq N_t\}}$  pour  $j \geq 1$ . On vérifie que  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , que  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus adapté à cette filtration et que, pour tout  $t > s$ ,  $N_t - N_s$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_s$ . La prise en compte des variables aléatoires  $U_j \mathbf{1}_{\{j \leq N_t\}}$  dans  $\mathcal{F}_t$  signifie qu'à l'instant  $t$ , les valeurs relatives des sauts ayant eu lieu avant  $t$  sont connues. Notons aussi que les  $\tau_j$  sont des temps d'arrêt de  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , puisque  $\{\tau_j \leq t\} = \{N_t \geq j\} \in \mathcal{F}_t$ .

L'évolution de  $X_t$ , prix de l'actif risqué à l'instant  $t$  peut maintenant être décrite de la façon suivante. Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus continu à droite adapté vérifiant :

- Sur les intervalles de temps  $[\tau_j, \tau_{j+1}[$  :

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

- A l'instant  $\tau_j$ , le saut de  $X_t$  est donné par :

$$\Delta X_{\tau_j} = X_{\tau_j} - X_{\tau_j^-} = X_{\tau_j^-} U_j,$$

$$\text{donc } X_{\tau_j} = X_{\tau_j^-} (1 + U_j).$$

On a donc, pour  $t \in [0, \tau_1[$  :

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t},$$

et par conséquent, la limite à gauche en  $\tau_1$  est donnée par :

$$X_{\tau_1^-} = X_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)\tau_1 + \sigma W_{\tau_1}}$$

et

$$X_{\tau_1} = X_0 (1 + U_1) e^{(\mu - \sigma^2/2)\tau_1 + \sigma W_{\tau_1}}.$$

Puis, pour  $t \in [\tau_1, \tau_2[$ ,

$$\begin{aligned} X_t &= X_{\tau_1} e^{(\mu - \sigma^2/2)(t - \tau_1) + \sigma(W_t - W_{\tau_1})} \\ &= X_{\tau_1^-} (1 + U_1) e^{(\mu - \sigma^2/2)(t - \tau_1) + \sigma(W_t - W_{\tau_1})} \\ &= X_0 (1 + U_1) e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi de proche en proche que :

$$X_t = X_0 \left( \prod_{j=1}^{N_t} (1 + U_j) \right) e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t},$$

avec la convention  $\prod_{j=1}^0 = 1$ .

Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  ainsi défini est évidemment continu à droite adapté et n'a qu'un nombre fini de discontinuités sur chaque intervalle  $[0, t]$ . On peut démontrer qu'il vérifie, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbf{P} \text{ p.s.} \quad X_t = X_0 + \int_0^t X_s (\mu ds + \sigma dW_s) + \sum_{j=1}^{N_t} X_{\tau_j^-} U_j \quad (7.1)$$

Nous verrons que, pour ce type de modèles, on ne peut pas, en général, couvrir parfaitement les options. Cette difficulté est liée au fait que pour  $T < +\infty$ , il existe une infinité de probabilités équivalentes à  $\mathbf{P}$  sur  $\mathcal{F}_T$  sous lesquelles le prix actualisé  $(e^{-rt}X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale. Dans la suite, nous ferons l'hypothèse que, sous  $\mathbf{P}$ , le processus  $(e^{-rt}X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale. C'est une hypothèse contraignante, mais elle nous permettra de déterminer simplement des stratégies de couverture à risque minimal. L'étude de la couverture des options, quand cette hypothèse n'est pas vérifiée, est délicate (voir [Sch89]).

Pour calculer  $\mathbf{E}(X_t | \mathcal{F}_s)$  nous aurons besoin du lemme suivant, dont la signification intuitive est que les amplitudes relatives des sauts qui ont lieu après l'instant  $s$  sont indépendantes de la tribu  $\mathcal{F}_s$ .

**Lemme 2.1** *Pour tout  $s \geq 0$ , les tribus  $\sigma(U_{N_s+1}, U_{N_s+2}, \dots, U_{N_s+k}, \dots)$  et  $\mathcal{F}_s$  sont indépendantes.*

**Démonstration :** Comme les tribus  $\mathcal{W} = \sigma(W_s, s \geq 0)$ ,  $\mathcal{N} = \sigma(N_s, s \geq 0)$  et  $\mathcal{U} = \sigma(U_i, i \geq 1)$  sont indépendantes, il suffit de prouver que la tribu  $\sigma(U_{N_s+1}, U_{N_s+2}, \dots, U_{N_s+k}, \dots)$  est indépendante de la tribu engendrée par les variables aléatoires  $N_u, u \leq s$  et  $U_j \mathbf{1}_{\{j \leq N_s\}}$ . Soit  $A$  un borélien de  $\mathbf{R}^k$ ,  $B$  un borélien de  $\mathbf{R}^d$  et  $C$  un événement de la tribu  $\sigma(N_u, u \leq s)$ . On a, en utilisant l'indépendance de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{N}$  et le fait que les  $U_j$  sont indépendantes et équidistribuées,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{(U_{N_s+1}, \dots, U_{N_s+k}) \in A\} \cap C \cap \{(U_1, \dots, U_d) \in B\} \cap \{d \leq N_s\}) \\ &= \sum_{p=d}^{\infty} \mathbf{P}(\{(U_{p+1}, \dots, U_{p+k}) \in A\} \cap \{(U_1, \dots, U_d) \in B\} \cap C \cap \{N_s = p\}) \\ &= \sum_{p=d}^{\infty} \mathbf{P}(\{(U_{p+1}, \dots, U_{p+k}) \in A\}) \mathbf{P}(\{(U_1, \dots, U_d) \in B\}) \mathbf{P}(C \cap \{N_s = p\}) \\ &= \mathbf{P}(\{(U_1, \dots, U_k) \in A\}) \sum_{p=d}^{\infty} \mathbf{P}(\{(U_1, \dots, U_d) \in B\}) \mathbf{P}(C \cap \{N_s = p\}). \end{aligned}$$

De cette égalité, on déduit (en prenant  $C = \Omega$  et  $B = \mathbf{R}^d$ ) que le vecteur  $(U_{N_s+1}, \dots, U_{N_s+k})$  a même loi que  $(U_1, \dots, U_k)$ , puis que

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{(U_{N_s+1}, \dots, U_{N_s+k}) \in A\} \cap C \cap \{(U_1, \dots, U_d) \in B\} \cap \{d \leq N_s\}) \\ &= \mathbf{P}(\{(U_{N_s+1}, \dots, U_{N_s+k}) \in A\}) \mathbf{P}(C \cap \{(U_1, \dots, U_d) \in B\}) \cap \{d \leq N_s\}). \end{aligned}$$

D'où l'indépendance annoncée. ■

Supposons maintenant que  $\mathbf{E}(|U_1|) < +\infty$  et posons  $\tilde{X}_t = e^{-rt}X_t$ . Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{X}_t | \mathcal{F}_s) &= \tilde{X}_s \mathbf{E} \left( e^{(\mu-r-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma(W_t-W_s)} \prod_{j=N_s+1}^{N_t} (1+U_j) \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ &= \tilde{X}_s \mathbf{E} \left( e^{(\mu-r-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma(W_t-W_s)} \prod_{j=1}^{N_t-N_s} (1+U_{N_s+j}) \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ &= \tilde{X}_s \mathbf{E} \left( e^{(\mu-r-\sigma^2/2)(t-s)+\sigma(W_t-W_s)} \prod_{j=1}^{N_t-N_s} (1+U_{N_s+j}) \right), \end{aligned}$$



en utilisant le lemme 2.1 et le fait que  $W_t - W_s$  et  $N_t - N_s$  sont indépendants de la tribu  $\mathcal{F}_s$ . D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{X}_t | \mathcal{F}_s) &= \tilde{X}_s e^{(\mu-r)(t-s)} \mathbf{E} \left( \prod_{j=N_s+1}^{N_t} (1 + U_j) \right) \\ &= \tilde{X}_s e^{(\mu-r)(t-s)} e^{\lambda(t-s)\mathbf{E}(U_1)}, \end{aligned}$$

en utilisant l'exercice 39.

Il est clair alors que  $(\tilde{X}_t)$  est une martingale si et seulement si

$$\mu = r - \lambda \mathbf{E}(U_1).$$

Pour traiter les termes dus aux sauts dans les stratégies de couvertures, nous aurons encore besoin de deux lemmes, dont les démonstrations peuvent être sautées en première lecture. On notera  $\nu$  la loi commune des variables aléatoires  $U_j$ .

**Lemme 2.2** Soit  $\Phi(y, z)$  une fonction mesurable de  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , telle que pour tout réel  $z$  la fonction  $y \mapsto \Phi(y, z)$  soit continue sur  $\mathbf{R}^d$ , et soit  $(Y_t)_{t \geq 0}$  un processus continu à gauche, à valeur dans  $\mathbf{R}^d$ , adapté à la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . On suppose que, pour tout  $t > 0$  :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi^2(Y_s, z) \right) < +\infty.$$

Alors le processus  $M_t$  défini par :

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \Phi(Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi(Y_s, z),$$

est une martingale de carré intégrable et :

$$M_t^2 - \lambda \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi^2(Y_s, z)$$

est une martingale.

Noter que par convention  $\sum_{j=1}^0 = 1$ .

**Démonstration** : On suppose d'abord  $\Phi$  bornée et on pose :

$$C = \sup_{(y,z) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}} |\Phi(y, z)|.$$

On a alors  $\left| \sum_{j=1}^{N_t} \Phi(Y_{\tau_j}, U_j) \right| \leq CN_t$  et  $\left| \int_0^t \int \nu(dz) \Phi(Y_s, z) \right| \leq Ct$ . Donc  $M_t$  est de carré intégrable. Fixons  $s$  et  $t$ , avec  $s < t$ , et posons :

$$Z = \sum_{j=N_s+1}^{N_t} \Phi(Y_{\tau_j}, U_j)$$

A une subdivision  $\rho = (s_0 = s < s_1 < \dots < s_m = t)$  de l'intervalle  $[s, t]$  associons :

$$Z^\rho = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=N_{s_i}+1}^{N_{s_{i+1}}} \Phi(Y_{s_i}, U_j).$$

La continuité à gauche de  $(Y_t)_{t \geq 0}$  et la continuité de  $\Phi$  par rapport à  $y$  impliquent que  $Z^\rho$  converge presque sûrement vers  $Z$  quand le pas de la subdivision  $\rho$  tend vers 0. On a de plus  $|Z^\rho| \leq C(N_t - N_s)$ , ce qui entraîne que la convergence a lieu aussi dans  $L^1$  et même dans  $L^2$ .

On a :

$$\mathbf{E}(Z^\rho | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i}) \middle| \mathcal{F}_s \right) \quad (7.2)$$

en posant :

$$Z_{i+1} = \sum_{j=N_{s_i}+1}^{N_{s_{i+1}}} \Phi(Y_{s_i}, U_j) = \sum_{j=1}^{N_{s_{i+1}} - N_{s_i}} \Phi(Y_{s_i}, U_{N_{s_i}+j}).$$

En utilisant le lemme 2.1 et le fait que  $Y_{s_i}$  est  $\mathcal{F}_{s_i}$ -mesurable, et en appliquant la proposition 2.5 de l'appendice, on voit que :

$$\mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i}) = \bar{\Phi}_i(Y_{s_i}),$$

où  $\bar{\Phi}_i(y)$  est définie par :

$$\bar{\Phi}_i(y) = \mathbf{E} \left( \sum_{j=1}^{N_{s_{i+1}} - N_{s_i}} \Phi(y, U_{N_{s_i}+j}) \right).$$

La quantité  $\bar{\Phi}_i(y)$  est donc l'espérance d'une somme aléatoire et, d'après l'exercice 40 :

$$\bar{\Phi}_i(y) = \lambda(s_{i+1} - s_i) \int d\nu(z) \Phi(y, z).$$

En revenant à l'équation (7.2), on a donc :

$$\mathbf{E}(Z^\rho | \mathcal{F}_s) = \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\Phi}_i(Y_{s_i}) \middle| \mathcal{F}_s \right) = \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \lambda(s_{i+1} - s_i) \int d\nu(z) \Phi(Y_{s_i}, z) \middle| \mathcal{F}_s \right).$$

En faisant tendre le pas de  $\rho$  vers 0, on obtient :

$$\mathbf{E} \left( \sum_{j=N_s+1}^{N_t} \Phi(Y_{\tau_j}, U_j) \middle| \mathcal{F}_s \right) = \mathbf{E} \left( \lambda \int_s^t du \int d\nu(z) \Phi(Y_u, z) \middle| \mathcal{F}_s \right),$$

ce qui prouve que  $M_t$  est une martingale. Posons maintenant  $\bar{Z}^\rho = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i})$ . On peut écrire :

$$\bar{Z}^\rho = \sum_{i=0}^{m-1} \bar{\Phi}_i(Y_{s_i}) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda(s_{i+1} - s_i) \int d\nu(z) \Phi(Y_{s_i}, z).$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left( (Z^\rho - \bar{Z}^\rho)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ &= \mathbf{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{m-1} [Z_{i+1} - \mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i})] \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} [Z_{i+1} - \mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i})]^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ & \quad + 2 \sum_{i < j} \mathbf{E} \left( (Z_{i+1} - \mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i})) (Z_{j+1} - \mathbf{E}(Z_{j+1} | \mathcal{F}_{s_j})) \middle| \mathcal{F}_s \right). \end{aligned}$$

En conditionnant par rapport à  $\mathcal{F}_{s_j}$  et en utilisant le fait que  $Z_{i+1}$  est  $\mathcal{F}_{s_{i+1}}$  donc  $\mathcal{F}_{s_j}$ -mesurable, on voit que la deuxième somme est nulle. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( (Z^\rho - \bar{Z}^\rho)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) &= \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} (Z_{i+1} - \mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i}))^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ &= \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{E} \left( [Z_{i+1} - \mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i})]^2 \middle| \mathcal{F}_{s_i} \right) \middle| \mathcal{F}_s \right). \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau le lemme 2.1, on voit que :

$$\mathbf{E} \left[ (Z_{i+1} - \mathbf{E}(Z_{i+1} | \mathcal{F}_{s_i}))^2 \middle| \mathcal{F}_{s_i} \right] = V(Y_{s_i}),$$

où la fonction  $V$  est définie par :

$$V(\mathbf{y}) = \text{Var} \left( \sum_{j=1}^{N_{s_{i+1}} - N_{s_i}} \Phi(\mathbf{y}, U_{N_{s_i} + j}) \right)$$

et, d'après l'exercice 40,

$$V(\mathbf{y}) = \lambda(s_{i+1} - s_i) \int d\nu(z) \Phi^2(\mathbf{y}, z).$$

On a donc :

$$\mathbf{E} \left( (Z^\rho - \bar{Z}^\rho)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) = \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^{m-1} \lambda(s_{i+1} - s_i) \int d\nu(z) \Phi^2(Y_{s_i}, z) \middle| \mathcal{F}_s \right),$$

d'où, en faisant tendre le pas de la subdivision  $\rho$  vers 0 :

$$\mathbf{E} \left[ (M_t - M_s)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbf{E} \left[ \lambda \int_s^t du \int d\nu(z) \Phi^2(Y_u, z) \middle| \mathcal{F}_s \right]. \quad (7.3)$$

Puisque  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale de carré intégrable, on a :

$$\mathbf{E} \left[ (M_t - M_s)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbf{E} (M_t^2 + M_s^2 - 2M_t M_s \middle| \mathcal{F}_s) = \mathbf{E} (M_t^2 - M_s^2 \middle| \mathcal{F}_s)$$

et l'égalité (7.3) entraîne donc que  $M_t^2 - \lambda \int_0^t du \int d\nu(z) \Phi^2(Y_u, z)$  est une martingale.

Si on ne suppose plus  $\Phi$  bornée, mais  $\mathbf{E} \left( \int_0^t ds \int d\nu(z) \Phi^2(Y_s, z) \right) < +\infty$ , pour tout  $t$ , on peut introduire les fonctions (bornées)  $\Phi^n$  définies par  $\Phi^n(\mathbf{y}, z) = \inf(n, \sup(-n, \Phi(\mathbf{y}, z)))$ , et les martingales  $(M_t^n)_{t \geq 0}$  définies par :

$$M_t^n = \sum_{j=1}^{N_t} \Phi^n(Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi^n(Y_s, z).$$

On voit facilement que  $\mathbf{E} \left( \int_0^t ds \int \nu(dz) (\Phi^n(Y_s, z) - \Phi(Y_s, z))^2 \right)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il en résulte que la suite  $(M_t^n)_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2$  et comme  $M_t^n$  tend vers  $M_t$  p.s.,  $M_t$  est de carré intégrable et par passage à la limite, le lemme est vérifié pour  $\Phi$ . ■

**Lemme 2.3** *On conserve les hypothèses et les notations du lemme 2.2. Soit  $(A_t)_{t \geq 0}$  un processus adapté tel que  $\mathbf{E} \left( \int_0^t A_s^2 ds \right) < +\infty$  pour tout  $t$ . On pose  $L_t = \int_0^t A_s dW_s$  et comme dans le lemme 2.2 :*

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \Phi(Y_{\tau_j}, U_j) - \lambda \int_0^t ds \int \nu(dz) \Phi(Y_s, z).$$

Alors le produit  $L_t M_t$  est une martingale.

**Démonstration :** Il suffit de démontrer le lemme pour  $\Phi$  borné (le cas général se traitant en approchant  $\Phi$  par des  $\Phi^n = \inf(n, \sup(-n, \Phi))$ , comme dans la démonstration du lemme 2.2). Fixons  $s < t$  et notons  $\rho = (s_0 = s < s_1 < \dots < s_m = t)$  une subdivision de l'intervalle  $[s, t]$ . On a :

$$\mathbf{E} [(L_t M_t - L_s M_s) \middle| \mathcal{F}_s] = \mathbf{E} \left[ \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{E} ((L_{s_{i+1}} M_{s_{i+1}} - L_{s_i} M_{s_i}) \middle| \mathcal{F}_{s_i}) \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

Or, puisque  $(L_t)_{t \geq 0}$  et  $(M_t)_{t \geq 0}$  sont des martingales :

$$\mathbf{E} ((L_{s_{i+1}} M_{s_{i+1}} - L_{s_i} M_{s_i}) \middle| \mathcal{F}_{s_i}) = \mathbf{E} ((L_{s_{i+1}} - L_{s_i})(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}) \middle| \mathcal{F}_{s_i}).$$

D'où :

$$\mathbf{E} ((L_t M_t - L_s M_s) \middle| \mathcal{F}_s) = \mathbf{E} (\Lambda^\rho \middle| \mathcal{F}_s).$$

avec :

$$\Lambda^\rho = \sum_{i=0}^{m-1} (L_{s_{i+1}} - L_{s_i})(M_{s_{i+1}} - M_{s_i}).$$

Mais, on a :

$$\begin{aligned} |\Lambda^\rho| &\leq \left( \sup_{0 \leq i \leq m-1} |L_{s_{i+1}} - L_{s_i}| \right) \sum_{i=0}^{m-1} |M_{s_{i+1}} - M_{s_i}| \\ &\leq \sup_{0 \leq i \leq m-1} |L_{s_{i+1}} - L_{s_i}| \\ &\quad \left( \sum_{j=N_s+1}^{N_t} |\Phi(Y_{\tau_j}, U_j)| + \lambda \int_s^t du \int d\nu(z) |\Phi(Y_s, z)| \right) \\ &\leq \left( \sup_{0 \leq i \leq m-1} |L_{s_{i+1}} - L_{s_i}| \right) (C(N_t - N_s) + \lambda C(t - s)), \end{aligned}$$

avec  $C = \sup_{y,z} |\Phi(y, z)|$ . En utilisant la continuité de  $t \mapsto L_t$ , on voit que  $\Lambda^\rho$  tend presque sûrement vers 0 quand le pas de la subdivision  $\rho$  tend vers 0. On a, de plus :

$$|\Lambda^\rho| \leq 2 \sup_{s \leq u \leq t} |L_u| (C(N_t - N_s) + \lambda C(t - s)).$$

La variable aléatoire  $\sup_{s \leq u \leq t} |L_u|$  est dans  $L^2$  (par l'inégalité de Doob, cf. chapitre 3, proposition 3.7), ainsi que  $N_t - N_s$ . On en déduit que  $\Lambda^\rho$  tend vers 0 dans  $L^1$  et par conséquent :

$$\mathbf{E}[(L_t M_t - L_s M_s) | \mathcal{F}_s] = 0.$$

■

## 3 Evaluation et couverture des options

### 3.1 Les stratégies admissibles

Nous reprenons le modèle introduit au début du paragraphe précédent, en supposant que les  $U_i$  sont de carré intégrable et que

$$\mu = r - \lambda \mathbf{E}(U_1) = r - \lambda \int z \nu(dz), \quad (7.4)$$

ce qui entraîne que le processus  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0} = (e^{-rt} X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale. Remarquons que

$$\mathbf{E}(X_t^2) = X_0^2 \mathbf{E} \left( e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \prod_{j=1}^{N_t} (1 + U_j) \right)^2$$

et par conséquent, en utilisant l'exercice 39,

$$\mathbf{E}(X_t^2) = X_0^2 e^{(\sigma^2 + 2r)t} e^{\lambda t \mathbf{E}(U_1^2)}.$$

Le processus  $(\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$  est donc une martingale de carré intégrable.

Pour toute la suite, nous fixons un horizon  $T$  fini. Une stratégie de gestion sera définie, comme dans le modèle de Black-Scholes, par un processus adapté  $\phi = ((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ , représentant les quantités d'actifs détenues au cours du temps, mais, pour tenir compte des sauts, nous imposerons aux processus  $(H_t^0)$  et  $(H_t)$  d'être *continus à gauche*. Comme le processus  $(X_t)$  est, lui, continu à droite, cela signifie, intuitivement, qu'on ne peut réagir aux sauts qu'après coup. Cette condition est à rapprocher de la condition de *prévisibilité* qui intervient dans les modèles discrets (cf. chapitre 1) et qui est un peu plus délicate à définir en temps continu.

La valeur à l'instant  $t$  de la stratégie  $\phi$  est donnée par  $V_t = H_t^0 e^{rt} + H_t X_t$  et nous dirons que la stratégie est autofinancée si

$$dV_t = H_t^0 r e^{rt} dt + H_t dX_t,$$

la différentielle par rapport à  $X_t$  signifiant, compte tenu de l'équation (7.1) que  $dV_t = H_t^0 r e^{rt} dt + H_t X_t (\mu dt + \sigma dW_t)$  entre les instants de saut et qu'à un instant de saut  $\tau_j$ ,  $V_t$  saute d'une quantité  $\Delta V_{\tau_j} = H_{\tau_j} \Delta X_{\tau_j} = H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-}$ . De façon précise, la condition d'autofinancement s'écrit :

$$\begin{aligned} V_t = H_t^0 e^{rt} + H_t X_t &= V_0 + \int_0^t H_s^0 r e^{rs} ds + \int_0^t H_s X_s (\mu ds + \sigma dW_s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Pour que cette équation ait un sens, il suffit d'imposer la condition  $\int_0^T |H_s^0| ds + \int_0^T H_s^2 ds < \infty$ , p.s. (il est facile de voir que  $s \mapsto X_s$  est presque sûrement borné). En fait, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, nous allons imposer une condition d'intégrabilité plus forte sur le processus  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ , en restreignant la classe des stratégies admissibles de la façon suivante :

**Définition 3.1** Une stratégie admissible est définie par un processus :

$$\phi = ((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$$

adapté, continu à gauche à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$  tel que  $\int_0^T |H_s^0| ds < +\infty$  **P** p.s. et  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 X_s^2 ds \right) < +\infty$ , vérifiant l'égalité (7.5) p.s., pour tout  $t \in [0, T]$ .

Noter que nous n'imposons pas de condition de positivité sur la valeur des stratégies admissibles. La proposition suivante est l'analogue de la proposition 1.2 du chapitre 4.

**Proposition 3.2** Soit  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus continu à gauche adapté tel que :

$$\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 X_s^2 ds \right) < \infty,$$

et soit  $V_0 \in \mathbf{R}$ . Il existe un et un seul processus  $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}$  tel que le couple  $((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$  définisse une stratégie admissible de valeur initiale  $V_0$ . La valeur actualisée à l'instant  $t$  de cette stratégie est donnée par

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_s \tilde{X}_s \sigma dW_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} - \lambda \int_0^t ds H_s \tilde{X}_s \int \nu(dz) z.$$

**Démonstration :** Si le couple  $(H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$  définit une stratégie admissible, sa valeur à l'instant  $t$  est donnée par  $V_t = Y_t + Z_t$ , avec  $Y_t = V_0 + \int_0^t H_s^0 r e^{rs} ds + \int_0^t H_s X_s (\mu ds + \sigma dW_s)$  et  $Z_t = \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j X_{\tau_j^-}$ . On a donc, en différenciant le produit  $e^{-rt} Y_t$ ,

$$e^{-rt} V_t = V_0 + \int_0^t (-r e^{-rs}) Y_s ds + \int_0^t e^{-rs} dY_s + e^{-rt} Z_t. \quad (7.6)$$

De plus, le produit  $e^{-rt}Z_t$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
e^{-rt}Z_t &= \sum_{j=1}^{N_t} e^{-rt}H_{\tau_j}U_jX_{\tau_j^-} \\
&= \sum_{j=1}^{N_t} \left( e^{-r\tau_j} + \int_{\tau_j}^t (-re^{-rs})ds \right) H_{\tau_j}U_jX_{\tau_j^-} \\
&= \sum_{j=1}^{N_t} e^{-r\tau_j}H_{\tau_j}U_jX_{\tau_j^-} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_t} \int_0^t ds \mathbf{1}_{\{\tau_j \leq s\}} (-re^{-rs})H_{\tau_j}U_jX_{\tau_j^-} \\
&= \sum_{j=1}^{N_t} e^{-r\tau_j}H_{\tau_j}U_jX_{\tau_j^-} + \int_0^t ds (-re^{-rs}) \sum_{j=1}^{N_s} H_{\tau_j}U_jX_{\tau_j^-} \\
&= \sum_{j=1}^{N_t} e^{-r\tau_j}H_{\tau_j}U_jX_{\tau_j^-} + \int_0^t (-re^{-rs})Z_s ds.
\end{aligned}$$

En reportant dans (7.6) et en explicitant  $dY_s$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_t &= V_0 + \int_0^t (-re^{-rs})V_s ds + \int_0^t H_s^0 r ds + \int_0^t H_s \tilde{X}_s (\mu ds + \sigma dW_s) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} \\
&= V_0 - \int_0^t r (H_s^0 + H_s \tilde{X}_s) ds + \int_0^t H_s^0 r ds + \int_0^t H_s \tilde{X}_s (\mu ds + \sigma dW_s) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} \\
&= V_0 + \int_0^t H_s \tilde{X}_s ((\mu - r) ds + \sigma dW_s) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-},
\end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de l'égalité (7.4), donne

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t H_s \tilde{X}_s \sigma dW_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} - \lambda \int_0^t ds H_s \tilde{X}_s \int \nu(dz)z.$$

Il est clair alors que si on se donne  $V_0$  et  $(H_t)$ , l'unique processus  $(H_t^0)$  possible pour que  $((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$  soit une stratégie admissible de valeur initiale  $V_0$  est donné par :

$$\begin{aligned}
H_t^0 &= \tilde{V}_t - H_t \tilde{X}_t \\
&= -H_t \tilde{X}_t + V_0 + \int_0^t H_s \tilde{X}_s \sigma dW_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} - \lambda \int_0^t ds H_s \tilde{X}_s \int \nu(dz)z.
\end{aligned}$$

Sur cette formule, on voit que le processus  $(H_t^0)$  est adapté et admet une limite à gauche en tout point et que l'on a  $H_t^0 = H_{t-}^0$ . C'est clair en effet si  $t$  n'est pas un des instants de saut  $\tau_j$  et si  $t$  est un des  $\tau_j$ , on a

$$H_{\tau_j}^0 - H_{\tau_j-}^0 = -H_{\tau_j} \Delta \tilde{X}_{\tau_j} + H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j-} = 0.$$

Il est clair aussi que  $\int_0^T |H_t^0| dt < \infty$  presque sûrement. De plus, en écrivant  $H_t^0 e^{rt} + H_t X_t = e^{rt} (H_t^0 + H_t \tilde{X}_t)$  et en intégrant par parties comme ci-dessus on voit que  $((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$  définit une stratégie admissible de valeur initiale  $V_0$ . ■

**Remarque 3.3** La condition  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 \tilde{X}_s^2 ds \right) < \infty$  entraîne que la valeur actualisée  $(\tilde{V}_t)$  d'une stratégie admissible est une martingale de carré intégrable. Cela résulte de l'expression obtenue dans la proposition 3.2 et du lemme 2.2, appliqué avec le processus continu à gauche défini par  $Y_t = (H_t, \tilde{X}_{t-})$  (noter que dans l'intégrale par rapport à  $ds$ , on peut remplacer  $\tilde{X}_{s-}$  par  $\tilde{X}_s$  car il n'y a qu'un nombre fini de discontinuités).

## 3.2 Pricing

Considérons une option européenne d'échéance  $T$ , définie par une variable aléatoire  $h$   $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable. Prenons, pour fixer les idées, le point de vue du vendeur de l'option. Il vend l'option à un prix  $V_0$  à l'instant 0 et suit ensuite une stratégie admissible entre les instants 0 et  $T$ . D'après la proposition 3.2, cette stratégie est complètement déterminée par le processus  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  des quantités d'actif à risque. Si  $V_t$  désigne la valeur de cette stratégie à l'instant  $t$ , le défaut de couverture à l'échéance est donné par la quantité  $h - V_T$ . Si cette quantité est positive, le vendeur perd de l'argent, sinon il en gagne. Une façon d'évaluer le risque consiste à introduire la quantité :

$$R_0^T = \mathbf{E} \left( \left( e^{-rT} (h - V_T) \right)^2 \right).$$

Puisque, d'après la remarque 3.3, la valeur actualisée  $(\tilde{V}_t)$  est une martingale, on a  $\mathbf{E} \left( e^{-rT} V_T \right) = V_0$ . Appliquant l'identité  $\mathbf{E}(Z^2) = (\mathbf{E}(Z))^2 + \mathbf{E}([Z - \mathbf{E}(Z)]^2)$  à la variable aléatoire  $Z = e^{-rT} (h - V_T)$ , on obtient :

$$R_0^T = \left( \mathbf{E}(e^{-rT} h) - V_0 \right)^2 + \mathbf{E} \left( e^{-rT} h - \mathbf{E}(e^{-rT} h) - (\tilde{V}_T - V_0) \right)^2. \quad (7.7)$$

La proposition 3.2 montre que la quantité  $\tilde{V}_T - V_0$  ne dépend que de  $(H_t)$  (et pas de  $V_0$ ). Si le vendeur cherche à minimiser le risque  $R_0^T$ , il est amené à faire payer  $V_0 = \mathbf{E}(e^{-rT} h)$ . La grandeur  $\mathbf{E}(e^{-rT} h)$  apparaît ainsi comme la valeur initiale de toute stratégie visant à minimiser le risque à l'échéance et c'est cette grandeur que nous prendrons comme définition du prix de l'option associée à  $h$ . Par un raisonnement analogue, on voit que si on se place à un instant  $t > 0$ , un agent qui vend l'option à l'instant  $t$ , s'il cherche à minimiser la quantité  $R_t^T = \mathbf{E} \left( \left( e^{-r(T-t)} (h - V_T) \right)^2 | \mathcal{F}_t \right)$ , la vendra au prix  $V_t = \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t \right)$ . C'est cette quantité que nous prendrons comme définition du prix de l'option à l'instant  $t$ .

## 3.3 Prix des calls et des puts

Avant d'aborder le problème de la couverture, nous allons tenter d'explicitier le prix d'un call ou d'un put de prix d'exercice  $K$ . Nous supposons donc que  $h$  est de la forme  $f(X_T)$ , avec

$f(x) = (x - K)_+$  ou  $f(x) = (K - x)_+$ . D'après ce qui précède, le prix de l'option à l'instant  $t$  est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} f(X_T) | \mathcal{F}_t \right) &= \\ &= \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} f \left( X_t e^{(\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \prod_{j=N_t+1}^{N_T} (1 + U_j) \right) | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} f \left( X_t e^{(\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \prod_{j=1}^{N_T - N_t} (1 + U_{N_t+j}) \right) | \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

Du lemme 2.1 et de cette égalité, on déduit que

$$\mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} f(X_T) | \mathcal{F}_t \right) = F(t, X_t),$$

avec

$$\begin{aligned} F(t, x) &= \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} f \left( x e^{(\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1 + U_j) \right) \right) \\ &= \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} f \left( x e^{(r - \lambda \mathbf{E}(U_1) - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1 + U_j) \right) \right). \end{aligned}$$

Notons que si l'on introduit la fonction :

$$F_0(t, x) = \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} f \left( x e^{(r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \right) \right),$$

qui donne le prix de l'option suivant le modèle de Black-Scholes, on a :

$$F(t, x) = \mathbf{E} \left( F_0 \left( t, x e^{-\lambda(T-t)\mathbf{E}(U_1)} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1 + U_j) \right) \right). \quad (7.8)$$

Puisque  $N_{T-t}$  est une variable aléatoire indépendante des  $U_j$  et de loi poissonnienne de paramètre  $\lambda(T-t)$  on peut aussi écrire :

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E} \left( F_0 \left( t, x e^{-\lambda(T-t)\mathbf{E}(U_1)} \prod_{j=1}^n (1 + U_j) \right) \right) \frac{e^{-\lambda(T-t)} \lambda^n (T-t)^n}{n!}.$$

Chaque terme de cette série peut se calculer numériquement dès que l'on sait simuler la loi des  $U_j$ . Pour certaines lois, l'espérance mathématique qui intervient dans la formule peut être calculée explicitement (cf. exercice 42).

### 3.4 Couverture des calls et des puts

Examinons maintenant le problème de la couverture d'une option  $h = f(X_T)$ , avec  $f(x) = (x - K)_+$  ou  $f(x) = (K - x)_+$ . Nous avons vu que la valeur initiale de toute stratégie admissible visant à minimiser le risque  $R_0^T$  à l'échéance était donnée par  $V_0 = \mathbf{E}(e^{-rT}h) = F(0, X_0)$ . Pour une telle stratégie, l'égalité (7.7) donne :

$$R_0^T = \mathbf{E} \left( e^{-rT} h - \tilde{V}_T \right)^2.$$

Nous allons maintenant déterminer un processus  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  des quantités d'actif à risque détenues en portefeuille permettant de minimiser  $R_0^T$ . Pour cela, nous nous appuyerons sur la proposition suivante.



**Proposition 3.4** Soit  $V_t$  la valeur à l'instant  $t$  d'une stratégie admissible de valeur initiale  $V_0 = \mathbf{E} \left( e^{-rT} f(X_T) \right) = F(0, X_0)$ , déterminée par un processus  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  des quantités d'actif à risque. Le risque quadratique à l'échéance  $R_0^T = \mathbf{E} \left( e^{-rT} (f(X_T) - V_T) \right)^2$  est donné par la formule suivante :

$$R_0^T = \mathbf{E} \left( \int_0^T \left( \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) - H_s \right)^2 \tilde{X}_s^2 \sigma^2 ds + \int_0^T \lambda \int \nu(dz) e^{-2rs} (F(s, X_s(1+z)) - F(s, X_s) - H_s z X_s)^2 ds \right).$$

**Démonstration :** D'après la proposition 3.2, on a, pour  $t \leq T$ ,

$$\tilde{V}_t = F(0, X_0) + \int_0^t \sigma H_s \tilde{X}_s dW_s + \sum_{j=1}^{N_t} H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} - \lambda \int_0^t ds \tilde{X}_s H_s \mathbf{E}(U_1). \quad (7.9)$$

On a, d'autre part,  $\tilde{h} = e^{-rT} f(X_T) = e^{-rT} F(T, X_T)$ . Introduisons la fonction  $\tilde{F}$  définie par

$$\tilde{F}(t, x) = e^{-rt} F(t, x e^{rt}),$$

de sorte que  $\tilde{F}(t, \tilde{X}_t) = \mathbf{E}(\tilde{h} | \mathcal{F}_t)$ . La quantité  $\tilde{F}(t, \tilde{X}_t)$  apparaît ainsi comme le prix actualisé de l'option à l'instant  $t$ . On déduit facilement (exercice) de la formule (7.8) que  $\tilde{F}(t, x)$  est de classe  $C^2$  sur  $[0, T] \times \mathbf{R}_+$  et, en écrivant la formule d'Itô entre les instants de sauts, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t, \tilde{X}_t) = & F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial s}(s, \tilde{X}_s) ds + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) \tilde{X}_s (-\lambda \mathbf{E}(U_1) ds + \sigma dW_s) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(s, \tilde{X}_s) \sigma^2 \tilde{X}_s^2 ds + \sum_{j=1}^{N_t} \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j}) - \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j^-}). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Remarquons que la fonction  $\tilde{F}(t, x)$  est lipschitzienne de rapport 1 par rapport à  $x$ , puisque :

$$\begin{aligned} |F(t, x) - F(t, y)| & \leq \\ & \leq \mathbf{E} \left( e^{-r(T-t)} \left| f \left( x e^{(r-\lambda \mathbf{E}(U_1) - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1 + U_j) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - f \left( y e^{(r-\lambda \mathbf{E}(U_1) - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma W_{T-t}} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1 + U_j) \right) \right| \right) \\ & \leq |x - y| \mathbf{E} \left( e^{-\lambda \mathbf{E}(U_1)(T-t)} e^{\sigma W_{T-t} - (\sigma^2/2)(T-t)} \prod_{j=1}^{N_{T-t}} (1 + U_j) \right) \\ & = |x - y|. \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left( \int_0^t ds \int \nu(dz) (\tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s))^2 \right) \\ & \leq \mathbf{E} \left( \int_0^t ds \tilde{X}_s^2 \int \nu(dz) z^2 \right) \\ & < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui, d'après le lemme 2.2, implique que le processus :

$$M_t = \sum_{j=1}^{N_t} \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j}) - \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j^-}) - \lambda \int_0^t ds \int (\tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s)) d\nu(z)$$

est une martingale de carré intégrable. On sait aussi que  $\tilde{F}(t, \tilde{X}_t)$  est une martingale. Le processus  $\tilde{F}(t, \tilde{X}_t) - M_t$  est donc aussi une martingale et, d'après l'égalité (7.10), c'est un processus d'Itô. Il s'écrit donc, d'après l'exercice 16 du chapitre 3, comme une intégrale stochastique. D'où :

$$\tilde{F}(t, \tilde{X}_t) - M_t = F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) \tilde{X}_s \sigma dW_s. \quad (7.11)$$

En réunissant les égalités (7.9) et (7.11), on obtient :

$$\tilde{h} - \tilde{V}_T = M_T^{(1)} + M_T^{(2)},$$

avec :

$$\begin{aligned} M_t^{(1)} &= \int_0^t \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) - H_s \right) \sigma \tilde{X}_s dW_s \\ \text{et } M_t^{(2)} &= \sum_{j=1}^{N_t} \left( \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j}) - \tilde{F}(\tau_j, \tilde{X}_{\tau_j^-}) - H_{\tau_j} U_j \tilde{X}_{\tau_j^-} \right) \\ &\quad - \lambda \int_0^t ds \int d\nu(z) \left( \tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s) - H_s z \tilde{X}_s \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.3,  $M_t^{(1)} M_t^{(2)}$  est une martingale et par conséquent  $\mathbf{E} \left( M_t^{(1)} M_t^{(2)} \right) = M_0^{(1)} M_0^{(2)} = 0$ . D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \tilde{h} - \tilde{V}_T \right) &= \mathbf{E} \left( (M_T^{(1)})^2 \right) + \mathbf{E} \left( (M_T^{(2)})^2 \right) \\ &= \mathbf{E} \left( \int_0^T \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) - H_s \right)^2 \tilde{X}_s^2 \sigma^2 ds \right) + \mathbf{E} \left( (M_T^{(2)})^2 \right), \end{aligned}$$

et par une nouvelle application du lemme 2.2 :

$$\mathbf{E} \left( (M_T^{(2)})^2 \right) = \mathbf{E} \left( \lambda \int_0^T ds \int \nu(dz) \left( \tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s) - H_s z \tilde{X}_s \right)^2 \right).$$

Le risque à l'échéance est donc donné par :

$$\begin{aligned} R_0^T &= \mathbf{E} \left( \int_0^T \left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) - H_s \right)^2 \tilde{X}_s^2 \sigma^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \lambda \int \nu(dz) \left( \tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s) - H_s z \tilde{X}_s \right)^2 ds \right). \end{aligned}$$

■

Il résulte de ce qui précède que le risque minimal est obtenu quand  $H_s$  vérifie **P** p.s. :

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(s, \tilde{X}_s) - H_s \right) \tilde{X}_s^2 \sigma^2 \\ &\quad + \lambda \int \nu(dz) \left( \tilde{F}(s, \tilde{X}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{X}_s) - H_s z \tilde{X}_s \right) z \tilde{X}_s = 0. \end{aligned}$$

Il suffit en effet de minimiser la quantité intégrée par rapport à  $ds$ . Cela donne, puisque  $(H_t)_{t \geq 0}$  doit être continu à gauche :

$$H_s = \Delta(s, X_{s^-}),$$

avec :

$$\Delta(s, x) = \frac{1}{\sigma^2 + \lambda \int \nu(dz) z^2} \left( \sigma^2 \frac{\partial F}{\partial x}(s, x) + \lambda \int \nu(dz) z \frac{(F(s, x(1+z)) - F(s, x))}{x} \right).$$

On obtient ainsi un processus qui vérifie  $\mathbf{E} \left( \int_0^T H_s^2 \tilde{X}_s^2 ds \right) < +\infty$  et qui détermine donc une stratégie admissible minimisant le risque à l'échéance. Noter que s'il n'y a pas de sauts ( $\lambda = 0$ ), on retrouve la formule de couverture déjà obtenue dans le modèle de Black-Scholes et on sait que dans ce cas, la couverture est parfaite, c'est-à-dire que  $R_0^T = 0$ . Mais, quand il y a des sauts, le risque minimal est en général strictement positif (cf. exercice 43 et [Cha90]).

**Remarque 3.5** Les formules obtenues montrent que les modèles avec sauts se prêtent assez bien au calcul. Il reste le problème de l'identification des paramètres et de la loi des  $U_i$ . Comme dans le cas de la volatilité pour le modèle de Black-Scholes, deux approches sont possibles : 1) une approche statistique, à partir des données historiques 2) une approche implicite, à partir des données de marché, c'est-à-dire des prix des options quand elles sont cotées sur un marché organisé. Dans cette deuxième approche, les modèles avec sauts, qui font intervenir plusieurs paramètres, permettent de "coller" davantage aux prix de marché.

**Remarque bibliographique :** Les modèles financiers avec sauts ont été introduits par Merton dans [Mer76]. L'approche adoptée dans ce chapitre est basée sur [FS86], [CER88] et [BL89].

La méthode d'évaluation que nous avons présentée dans ce chapitre repose de manière cruciale sur l'hypothèse que le prix actualisé de l'actif sous-jacent est une martingale. Cette hypothèse a un caractère assez arbitraire, même si certaines justifications sont possibles. De plus, l'utilisation de la variance comme mesure du risque est discutable. Ces problèmes ont donné lieu à d'actives recherches dans les années récentes. Le lecteur pourra notamment consulter [FS91, Sch92, Sch94, Sch95, KQ95].

## 4 Exercices

**Exercice 39** Soit  $(V_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires positives indépendantes équidistribuées et soit  $N$  une variable aléatoire à valeur dans  $\mathbf{N}$ , suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , indépendante de la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$ . Montrer que :

$$\mathbf{E} \left( \prod_{n=1}^N V_n \right) = e^{\lambda(\mathbf{E}(V_1)-1)}.$$

**Exercice 40** Soit  $(V_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées, intégrables et soit  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbf{N}$ , intégrable et indépendante de la suite  $(V_n)$ . On pose  $S = \sum_{n=1}^N V_n$  (avec la convention  $\sum_{n=1}^0 = 0$ ).

1. Montrer que  $S$  est intégrable et que  $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(V_1)$ .
2. On suppose  $N$  et  $V_1$  de carré intégrable. Montrer qu'alors  $S$  est de carré intégrable et que sa variance est donnée par  $\text{Var}(S) = \mathbf{E}(N)\text{Var}(V_1) + \text{Var}(N)(\mathbf{E}(V_1))^2$ .
3. En déduire que si  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ ,  $\mathbf{E}(S) = \lambda\mathbf{E}(V_1)$  et  $\text{Var}(S) = \lambda\mathbf{E}(V_1^2)$ .

**Exercice 41** Les hypothèses et les notations sont celles de l'exercice 40. On suppose que les  $V_j$  sont à valeurs dans  $\{\alpha, \beta\}$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  et on pose  $p = \mathbf{P}(V_1 = \alpha) = 1 - \mathbf{P}(V_1 = \beta)$ . Montrer que  $S$  a même loi que  $\alpha N_1 + \beta N_2$  où  $N_1$  et  $N_2$  sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda p$  et  $(1-p)\lambda$ .

- Exercice 42**
1. On suppose, avec les notations du paragraphe 3, que  $U_1$  est à valeurs dans  $\{a, b\}$ , avec  $p = \mathbf{P}(U_1 = a) = 1 - \mathbf{P}(U_1 = b)$ . Mettre la formule de prix (7.8) sous la forme d'une série double dont chaque terme se calcule à partir des formules de Black-Scholes (on pourra utiliser l'exercice 41).
  2. On suppose maintenant que  $U_1$  a même loi que  $e^g - 1$ , où  $g$  est une gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ . Mettre la formule de prix (7.8) sous la forme d'une série dont chaque terme se calcule à partir des formules de Black-Scholes (avec des taux d'intérêt et des volatilités que l'on précisera).

**Exercice 43** Le but de cet exercice est de montrer que, dans les modèles avec sauts étudiés dans ce chapitre, il n'y a pas de couverture parfaite pour les calls et les puts. On considère un modèle dans lequel  $\sigma > 0$ ,  $\lambda > 0$  et  $\mathbf{P}(U_1 \neq 0) > 0$ .

1. A partir de la proposition 3.4, montrer que, s'il existe une stratégie de couverture parfaite, alors, pour ds presque tout  $s$  et pour  $v$  presque tout  $z$ , on a :

$$\mathbf{P} \text{ p.s. } zX_s \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) = F(s, X_s(1+z)) - F(s, X_s).$$

2. Montrer que la loi de  $X_s$  admet (pour  $s > 0$ ) une densité strictement positive sur  $]0, \infty[$ . On pourra remarquer que si  $Y$  admet une densité  $g$  et si  $Z$  est une variable aléatoire indépendante de  $Y$  à valeurs dans  $]0, \infty[$ , la variable aléatoire  $YZ$  admet pour densité  $\int d\mu(z)(1/z)g(y/z)$ , où  $\mu$  est la loi de  $Z$ .
3. Sous les mêmes hypothèses qu'à la première question, montrer qu'il existe  $z \neq 0$  tel que pour  $s \in [0, T[$  et  $x \in ]0, \infty[$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(s, x) = \frac{F(s, x(1+z)) - F(s, x)}{zx}.$$

En déduire (en utilisant la convexité de  $F$  par rapport à  $x$ ) que, pour  $s \in [0, T]$ , la fonction  $x \mapsto F(s, x)$  est affine.

4. Conclusion. On pourra remarquer que, dans le cas du put, la fonction  $x \mapsto F(s, x)$  est positive et décroissante sur  $]0, \infty[$ .

# Chapitre 8

## Simulation et algorithmes pour les modèles financiers

### 1 Simulation et modèles financiers

Nous allons décrire, dans ce chapitre, des méthodes permettant la simulation des modèles financiers. Ces méthodes sont souvent utiles, dans le contexte des mathématiques financières, car elles permettent de calculer le prix de n'importe quelle option pour peu que l'on sache l'exprimer sous forme de l'espérance d'une variable aléatoire que l'on sait simuler. Dans ce cas, la méthode de Monte Carlo décrite plus loin permet alors d'écrire très rapidement un algorithme permettant l'évaluation de cette option. Ces méthodes sont malheureusement peu efficaces et on ne les utilise que si l'on ne sait expliciter le prix de l'option sous forme analytique. De même, quand on se pose des questions complexes sur une stratégie de gestion de portefeuille (par exemple, quelle sera la loi dans un mois d'un portefeuille couvert tous les 10 jours en delta neutre), la réponse exacte est inaccessible analytiquement. Les méthodes de simulation sont alors incontournables.

#### 1.1 La méthode de Monte Carlo

Le problème de la simulation se pose de la façon suivante. On se donne une variable aléatoire de loi  $\mu(dx)$  et l'on cherche à réaliser sur un ordinateur une suite de tirages  $X_1, \dots, X_n, \dots$  a priori infinie telle que les  $X_n$  suivent la loi  $\mu(dx)$  et que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  soit une suite de variables aléatoires indépendantes. Si ces hypothèses sont satisfaites, on peut appliquer la loi forte des grands nombres pour affirmer que, si  $f$  est une fonction  $\mu$ -intégrable :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} f(X_n) = \int f(x) \mu(dx). \quad (8.1)$$

Pour implémenter cette méthode sur un ordinateur, on procède de la façon suivante. On suppose que l'on sait construire une suite de nombres  $(U_n)_{n \geq 1}$  qui réalise une suite de variables aléatoires uniformes sur l'intervalle  $[0, 1]$ , indépendantes, et on cherche une fonction  $(u_1, \dots, u_p) \mapsto F(u_1, \dots, u_p)$  telle que la loi de la variable aléatoire  $F(U_1, \dots, U_p)$  soit la loi cherchée  $\mu(dx)$ . La suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  où  $X_n = F(U_{(n-1)p+1}, \dots, U_{np})$  est alors une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi voulue  $\mu$ . On peut, par exemple, appliquer (8.1), aux fonctions  $f(x) = x$  et  $f(x) = x^2$  pour estimer les moments d'ordre 1 et 2 de  $X$  (sous réserve que  $E(|X|^2)$  soit fini).

La suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  est réalisée concrètement par des appels successifs à un générateur de nombres pseudo-aléatoires. La plupart des langages disponibles sur les ordinateurs modernes possèdent une fonction aléatoire, déjà programmée, qui retourne soit un nombre pseudo aléatoire compris entre 0 et 1, soit un entier aléatoire dans un intervalle fixé (cette fonction porte le nom de `rand()` en C ANSI, de `random` en Turbo Pascal).

**Remarque 1.1** La fonction  $F$  peut dans certain cas (en particulier lorsque l'on cherche à simuler des temps d'arrêt), dépendre de toute la suite  $(U_n)_{n \geq 1}$ , et non plus d'un nombre fixe de  $U_i$ . La méthode précédente est encore utilisable si l'on sait simuler  $X$  à l'aide d'un nombre presque sûrement fini de  $U_i$ , ce nombre pouvant dépendre du hasard. C'est le cas, par exemple, de l'algorithme de simulation d'une variable aléatoire poissonnienne (voir page 151).

## 1.2 Simulation d'une loi uniforme sur $[0, 1]$

Nous allons montrer comment l'on peut construire des générateurs de nombres aléatoires au cas où les générateurs de la machine ne donneraient pas entière satisfaction.

La méthode la plus simple et la plus souvent utilisée est la méthode des congruences linéaires. On génère une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  de nombres entiers compris entre 0 et  $m - 1$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = \text{valeur initiale} \in \{0, 1, \dots, m - 1\} \\ x_{n+1} = ax_n + b \pmod{m} \end{cases}$$

$a, b, m$  étant des entiers qu'il faut choisir soigneusement si l'on veut que les caractéristiques statistiques de la suite soient satisfaisantes. Sedgewick dans [Sed87] préconise le choix suivant :

$$\begin{cases} a = 31415821 \\ b = 1 \\ m = 10^8 \end{cases}$$

Cette méthode permet de simuler des entiers pseudo aléatoires entre 0 et  $m - 1$  ; pour obtenir un nombre réel aléatoire entre 0 et 1 on divise l'entier aléatoire ainsi généré par  $m$ .

```
#define m 100000000
#define m1 10000
#define b 31415821
long Mult(long p, long q)
/* Multiplie p par q en evitant les "overflows" */
{
    long p1 = p / m1;
    long p0 = p % m1;
    long q1 = q / m1;
    long q0 = q % m1;
    return (((p0*q1 + p1*q0) % m1)*m1 + p0*q0) % m;
}
double Random()
{
    static long a;
    a = (Mult(a, b) + 1) % m;
    Random = a/m;
}
```

Le générateur précédent fournit des résultats acceptables dans les cas courants. Cependant sa période (ici  $m = 10^8$ ) peut se révéler parfois insuffisante. On peut, alors, obtenir des générateurs de nombres aléatoires de période arbitrairement longue en augmentant  $m$ . Le lecteur intéressé trouvera des nombreux renseignements sur les générateurs de nombres aléatoires et la façon de les programmer sur un ordinateur dans [Knu81] et [L'E90].

## 1.3 Simulation des variables aléatoires

Les lois que nous avons utilisées pour les modélisations financières sont essentiellement des lois gaussiennes (dans le cas des modèles continus) et des lois exponentielles et poissoniennes (dans le cas des modèles avec sauts). Nous allons donner des méthodes permettant de simuler chacune de ces lois.

### Simulation de variables gaussiennes

Une méthode classique pour simuler les variables aléatoires gaussiennes repose sur la constatation (voir exercice 44) que, si  $(U_1, U_2)$  sont deux variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$  indépendantes :

$$\sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

suit une loi gaussienne centrée et réduite (i.e. de moyenne nulle et de variance 1) .

Pour simuler des gaussiennes de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma$  il suffit de poser  $X = m + \sigma g$ , où  $g$  est une gaussienne centrée réduite.

```
double gaussienne(double m, double sigma)
{
    return m + sigma * sqrt(-2.0 * log(Random())) * cos(2.0 * pi * Random());
}
```

### Simulation d'une loi exponentielle

Rappelons qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu$  si sa loi vaut :

$$\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} \mu e^{-\mu x} dx$$

On peut simuler  $X$  en constatant que, si  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  :  $-\frac{\log(U)}{\mu}$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

```
double exponentielle(double mu)
{
    return - log(Random()) / mu ;
}
```

**Remarque 1.2** Ce moyen de simulation de la loi exponentielle est un cas particulier de la méthode de la "fonction de répartition" (voir à ce sujet l'exercice 45).

### Simulation d'une variable aléatoire poissonnienne

Une variable aléatoire poissonnienne est une variable à valeurs dans  $\mathbf{N}$  telle que :

$$\mathbf{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad \text{si } n \geq 0$$

On a vu au chapitre 7 que si  $(T_i)_{i \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires exponentielles de paramètre  $\lambda$ , alors la loi de  $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_1 + \dots + T_n \leq t < T_1 + \dots + T_{n+1}\}}$  est un loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .  $N_1$  a donc même loi que la variable  $X$  que l'on cherche à simuler. D'autre part, on peut toujours mettre les variables exponentielles  $T_i$  sous la forme  $-\log(U_i)/\lambda$ , où les  $(U_i)_{i \geq 1}$  sont des variables aléatoires suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendantes.  $N_1$  s'écrit alors :

$$N_1 = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{U_1 U_2 \dots U_{n+1} \leq e^{-\lambda} < U_1 U_2 \dots U_n\}}.$$

Cela conduit à l'algorithme suivant pour simuler une variable aléatoire de Poisson.

```

double Poisson(double lambda)
{
    double u = Random();
    double a = exp(-lambda);
    int n = 0;

    while(u > a){
        u = u * Random();
        n++;
    }
    return n;
}

```

Pour la simulation d'autres lois que nous n'avons pas citées, ou pour d'autres méthodes de simulation des lois précédentes, on pourra consulter [Bou86].

### Simulation de vecteurs gaussiens

Lorsque l'on construit des modèles où interviennent plusieurs actifs (par exemple lorsque l'on cherche à modéliser des paniers d'actifs comme l'indice boursier CAC40), on est amené à considérer des processus gaussiens à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ . Le problème de la simulation des vecteurs gaussiens (voir le paragraphe 1.2 de l'appendice pour la définition d'un vecteur gaussien) est alors essentiel. Nous allons donner une méthode de simulation de ce type de variables aléatoires.

Nous supposons que l'on cherche à simuler un vecteur gaussien  $(X_1, \dots, X_n)$  dont la loi est caractérisée par le vecteur des moyennes  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) = (\mathbf{E}(X_1), \dots, \mathbf{E}(X_n))$  et la matrice de covariance  $\Gamma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  où  $\sigma_{ij} = \mathbf{E}(X_i X_j) - \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j)$ . La matrice  $\Gamma$  est définie positive et nous supposons, de plus, qu'elle est inversible. On peut trouver une racine carrée de  $\Gamma$ , c'est à dire une matrice  $A$ , telle que  $A \times {}^t A = \Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est inversible,  $A$  l'est également, et on peut considérer le vecteur  $Z = A^{-1}(X - \mathbf{m})$ . Il est facile de vérifier que ce vecteur est un vecteur gaussien, centré. De plus sa matrice de covariance vaut :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(Z_i Z_j) &= \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n} \mathbf{E} \left( A_{ik}^{-1} (X_k - m_k) A_{jl}^{-1} (X_l - m_l) \right) \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n} \mathbf{E} \left( A_{ik}^{-1} A_{jl}^{-1} \sigma_{kl} \right) \\
 &= (A^{-1} \Gamma ({}^t A)^{-1})_{ij} = (A^{-1} A {}^t A ({}^t A)^{-1})_{ij} = \text{Id}.
 \end{aligned}$$

$Z$  est donc un vecteur gaussien centré de matrice de covariance identité. La loi du vecteur  $Z$  est celle de  $n$  gaussiennes centrées réduites indépendantes. La loi du vecteur  $X = \mathbf{m} + AZ$ , peut donc être simulée de la façon suivante :

- On calcule une racine carrée de la matrice  $\Gamma$ ,  $A$ .
- On simule  $n$  gaussiennes centrées réduites indépendantes  $G = (g_1, \dots, g_n)$ .
- On calcule  $\mathbf{m} + AG$ .

**Remarque 1.3** Pour calculer la racine carrée de  $\Gamma$ , on peut supposer  $A$  triangulaire supérieure, il y a alors une seule solution à l'équation  $A \times {}^t A = \Gamma$ . En explicitant cette équation, on obtient facilement les coefficients de  $A$ . Cette méthode de calcul de la racine carrée s'appelle la méthode de Cholevsky (pour un algorithme complet voir [Cia88]).

## 1.4 Simulation de processus stochastiques

Les méthodes décrites précédemment permettent de simuler une variable aléatoire, en particulier la valeur d'un processus stochastique à un instant donné. On a parfois besoin de savoir simuler toute la trajectoire d'un processus (par exemple, lorsque on étudie l'évolution au cours



du temps de la valeur d'un portefeuille d'option, voir l'exercice 47). Ce paragraphe propose quelques procédés élémentaires permettant de simuler des trajectoires de processus.

### Simulation du mouvement brownien

On peut citer deux méthodes permettant de simuler un mouvement brownien  $(W_t)_{t \geq 0}$ . La première consiste à "renormaliser" une marche aléatoire. Soit  $(X_i)_{i \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées de loi  $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1/2$ ,  $\mathbf{P}(X_i = -1) = 1/2$ . On a alors  $\mathbf{E}(X_i) = 0$  et  $\mathbf{E}(X_i^2) = 1$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , on peut alors "approximer" le mouvement brownien par le processus  $(X_t^n)_{t \geq 0}$  où :

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ . On trouvera un début de justification à cette façon de simuler le mouvement brownien dans l'exercice 48.

Dans la deuxième méthode, on remarque que, si  $(g_i)_{i \geq 0}$  est une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes, si  $\Delta t > 0$  et si l'on pose :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_{n+1} - S_n = g_n \end{cases}$$

alors la loi de  $(\sqrt{\Delta t}S_0, \sqrt{\Delta t}S_1, \dots, \sqrt{\Delta t}S_n)$  est identique à celle de :

$$(W_0, W_{\Delta t}, W_{2\Delta t}, \dots, W_{n\Delta t}).$$

On peut approximer le mouvement brownien par  $X_t^n = \sqrt{\Delta t} S_{[t/\Delta t]}$ .

### Simulation des équations différentielles stochastiques

Il existe de nombreuses méthodes, certaines très sophistiquées, pour simuler la solution d'une équation différentielle stochastique, on pourra consulter, pour un panorama de ces méthodes [PT85]. Nous ne parlerons ici que de la méthode la plus élémentaire : la "méthode d'Euler aléatoire". Le principe en est le suivant : considérons une équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t. \end{cases}$$

On se fixe un pas de discrétisation en temps  $\Delta t$ . On peut alors construire un processus à temps discret  $(S_n)_{n \geq 0}$  approximant la solution de l'équation différentielle stochastique aux instant  $n\Delta t$ , en posant :

$$\begin{cases} S_0 = x \\ S_{n+1} - S_n = \left\{ b(S_n)\Delta t + \sigma(S_n) (W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t}) \right\} \end{cases}$$

Si  $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$ ,  $(X_t^n)_{t \geq 0}$  approxime  $(X_t)_{t \geq 0}$  au sens suivant :

**Théorème 1.4** Pour tout  $T > 0$  :

$$\mathbf{E} \left( \sup_{t \leq T} |X_t^n - X_t|^2 \right) \leq C_T \Delta t,$$

$C_T$  étant une constante dépendant uniquement de  $T$ .

On trouvera la démonstration de ce résultat (ainsi que d'autres schémas de discrétisation des équations différentielles stochastiques) dans le chapitre 7 de [Gar88].

La loi de de la famille  $(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})_{n \geq 0}$  est identique à celle d'une famille de gaussiennes indépendantes centrées et de variance  $\Delta t$ . Dans une simulation, on remplace  $(W_{(n+1)\Delta t} - W_{n\Delta t})$  par  $g_n \sqrt{\Delta t}$ , où  $(g_n)_{n \geq 0}$  est une suite de gaussiennes centrées réduites indépendantes. La suite approximante  $(S'_n)_{n \geq 0}$  est dans ce cas définie par :

$$\begin{cases} S'_0 &= x \\ S'_{n+1} &= S'_n + \Delta t b(S'_n) + \sigma(S'_n)g_n \sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

**Remarque 1.5** On peut substituer à la suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes  $(g_i)_{i \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes  $(U_i)_{i \geq 0}$ , telle que  $\mathbf{P}(U_i = 1) = \mathbf{P}(U_i = -1) = 1/2$ . Il faut, cependant, noter que, dans ce cas, on n'a pas le même type de convergence que dans le théorème 1.4. On peut démontrer un théorème de convergence, mais sur les lois des processus. On pourra consulter [Kus77], [PT85], [Tal95] et [KP92] pour des précisions sur ce type de convergence et de nombreux résultats sur les discrétisations en loi des équations différentielles stochastiques.

### Une application au modèle de Black et Scholes

Dans le cas du modèle de Black et Scholes, il s'agit de simuler la solution de l'équation :

$$\begin{cases} X_0 &= x \\ dX_t &= X_t(rdt + \sigma dW_t). \end{cases}$$

On peut procéder de deux façons. La première consiste à utiliser la méthode d'Euler aléatoire. On pose :

$$\begin{cases} S_0 &= x \\ S_{n+1} &= S_n(1 + r\Delta t + \sigma g_n \sqrt{\Delta t}), \end{cases}$$

et à simuler  $X_t$  par  $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$ . L'autre méthode consiste à utiliser la forme explicite de la solution :

$$X_t = x \exp\left(rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right)$$

et à simuler le mouvement brownien par une des méthodes citées précédemment. Dans le cas où l'on simule le mouvement brownien par  $\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n g_i$ , on obtient

$$S_n = x \exp\left((r - \sigma^2/2)n\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n g_i\right). \quad (8.2)$$

On approxime toujours  $X_t$  par  $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$ .

**Remarque 1.6** On peut aussi substituer aux variables aléatoires gaussiennes  $g_i$  des variables de Bernouilli valant  $+1$  ou  $-1$  avec probabilité  $1/2$  dans (8.2), on obtient un modèle de type binomial proche du modèle de Cox Ross Rubinstein utilisé dans le paragraphe 3.3 du chapitre 5.

### Simulation des modèles avec sauts

On a considéré au chapitre 7 une extension du modèle de Black et Scholes comportant des sauts, nous allons décrire une méthode permettant de simuler ce processus. On reprend les notations et les hypothèses du chapitre 7 paragraphe 2. Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  servant de modèle d'actif s'écrit :

$$X_t = x \left( \prod_{j=1}^{N_t} (1 + U_j) \right) e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \quad (8.3)$$

où  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard,  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , et  $(U_j)_{j \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, à valeurs dans  $] -1, +\infty[$  de loi  $\mu(dx)$ . Les tribus engendrées par  $(W_t)_{t \geq 0}$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $(U_j)_{j \geq 1}$  sont supposées indépendantes.

Pour simuler ce processus aux instants  $n\Delta t$ , notons que l'on a :

$$X_{n\Delta t} = x \times (X_{\Delta t}/x) \times (X_{2\Delta t}/X_{\Delta t}) \times \dots \times (X_{n\Delta t}/X_{(n-1)\Delta t}).$$

Si l'on note  $Y_k = (X_{k\Delta t}/X_{(k-1)\Delta t})$ , on peut prouver, à l'aide des propriétés de  $(N_t)_{t \geq 0}$ ,  $(W_t)_{t \geq 0}$  et  $(U_j)_{j \geq 1}$  que la suite des  $(Y_k)_{k \geq 1}$  forme une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. Comme  $X_{n\Delta t} = x Y_1 \dots Y_n$ , la simulation de  $X$  aux instants  $n\Delta t$  se ramène à celle de la suite  $(Y_k)_{k \geq 1}$ . Cette suite étant indépendante équidistribuée, il suffit de savoir simuler  $Y_1 = X_{\Delta t}/x$ . On procède, alors, comme suit :

- On simule une variable aléatoire gaussienne centrée réduite  $g$ .
- On simule une variable aléatoire poissonnienne de paramètre  $\lambda \Delta t : N$ .
- Si  $N = n$ , on simule  $n$  variables aléatoires selon la loi  $\mu(dx) : U_1, \dots, U_n$ .

Toutes ces variables sont supposées indépendantes. Alors, il est facile de se convaincre en utilisant l'équation (8.3) que la loi de :

$$\left( \prod_{j=1}^N (1 + U_j) \right) e^{(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} g}$$

est identique à celle de  $Y_1$ .

## 2 Quelques algorithmes utiles

Nous avons rassemblé ici quelques algorithmes d'usage courant lorsque l'on cherche à calculer des prix d'options.

### 2.1 Approximation de la fonction de répartition d'une gaussienne

On a vu au chapitre 4 que le calcul du prix des nombreuses options classiques se ramène à l'évaluation de :

$$N(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

où  $X$  est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Vu l'importance de cette fonction pour les calculs d'option, nous en donnons deux formules d'approximation tirées de [AS70].

La première approximation est précise à  $10^{-7}$  près, mais elle utilise un appel à la fonction exponentielle. Si  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} p &= 0.2316419 \\ b_1 &= 0.319381530 \\ b_2 &= -0.356563782 \\ b_3 &= 1.781477937 \\ b_4 &= -1.821255978 \\ b_5 &= 1.330274429 \\ t &= 1/(1 + px) \end{aligned}$$

$$N(x) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5).$$

La deuxième approximation est précise à  $10^{-3}$  près mais elle ne fait intervenir qu'une fraction rationnelle. Si  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.196854 \\ c_2 &= 0.115194 \\ c_3 &= 0.000344 \\ c_4 &= 0.019527 \end{aligned}$$

$$N(x) \approx 1 - \frac{1}{2} (1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4)^{-4}.$$

## 2.2 Implémentation informatique de la méthode de Brennan et Schwartz

Le programme suivant implémente le calcul du prix d'un put américain en utilisant la méthode décrite au chapitre 5 paragraphe 3.2. On effectue un changement de variable logarithmique, on discrétise l'inéquation parabolique par une méthode totalement implicite et l'on résout l'inéquation en dimension infinie à l'aide de l'algorithme décrit page 112.

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>

#define NbrePasPrix      200
#define NbrePasTemps    200
#define Precision        0.01
#define NbreDeJoursDansAnnee  360

typedef long Date;
typedef double Montant;

typedef struct PutAmericain {
    Date DateContrat; /* en jours */
    Date DateEcheance; /* en jours */
    Montant PrixExercice;
} PutAmericain;

typedef double vecteur[NbrePasPrix];

typedef struct Modele {
    double r; /* taux d'interet annuel sans risque */
    double sigma; /* volatilité annuelle */
    double x0; /* Valeur initiale de l'EDS */
} Modele;

double ObstaclePut(double x, PutAmericain Opt)
{
    double u = Opt.PrixExercice - exp(x);
    if (u > 0) return u; else return 0.0;
}

double Prix(long t, double x, PutAmericain option, Modele modele)
/* Calcule le prix de l'"option" dans le "modele" a l'instant "t"
   si le prix du sous jacent a cet instant est "x". */
```

```

{
  vecteur Obst, A, B, C, G;
  double alpha, beta, gamma, h, k, vv, temp, r, y, delta, Temps;
  long Indice, IndicePrix, IndiceTemps;
  double l = 2.0; /* largeur de l'intervalle a considerer */

  Temps = (double)(option.DateEcheance - t) / NbreDeJoursDansAnnee;
  k = Temps / NbrePasTemps;
  r = modele.r;
  vv = modele.sigma * modele.sigma;
  h = 2 * l / NbrePasPrix;
  alpha = k * ((r - vv / 2.0) / (2.0 * h) - vv / (2.0 * h * h));
  beta = 1 + k * (r + vv / (h * h));
  gamma = k * ((vv / 2.0 - r) / (2.0 * h) - vv / (2.0 * h * h));

  for (IndicePrix = 0; IndicePrix < NbrePasPrix; IndicePrix++) {
    A[IndicePrix] = alpha;
    B[IndicePrix] = beta;
    C[IndicePrix] = gamma;
  }
  B[0] = beta + alpha;
  B[NbrePasPrix - 1] = beta + gamma;
  G[IndicePrix - 1] = 0.0;

  for (IndicePrix = NbrePasPrix - 1; IndicePrix >= 1; IndicePrix--)
    B[IndicePrix - 1] -= C[IndicePrix - 1] * A[IndicePrix] / B[IndicePrix];
  for (IndicePrix = 0; IndicePrix < NbrePasPrix; IndicePrix++) A[IndicePrix] /= B[IndicePrix];
  for (IndicePrix = 1; IndicePrix < NbrePasPrix; IndicePrix++) C[IndicePrix - 1] /= B[IndicePrix];

  y = log(x);
  for (IndicePrix = 1; IndicePrix <= NbrePasPrix; IndicePrix++)
    Obst[IndicePrix - 1] = ObstaclePut(y - l + IndicePrix * h, option);
  for (IndicePrix = 0; IndicePrix < NbrePasPrix; IndicePrix++)
    G[IndicePrix] = Obst[IndicePrix];

  for (IndiceTemps = 1; IndiceTemps <= NbrePasTemps; IndiceTemps++) {
    for (IndicePrix = NbrePasPrix - 1; IndicePrix >= 1; IndicePrix--)
      G[IndicePrix - 1] -= C[IndicePrix - 1] * G[IndicePrix];
    G[0] /= B[0];
    for (IndicePrix = 2; IndicePrix <= NbrePasPrix; IndicePrix++) {
      G[IndicePrix - 1] = G[IndicePrix - 1] / B[IndicePrix - 1]
        - A[IndicePrix - 1] * G[IndicePrix - 2];
      temp = Obst[IndicePrix - 1];
      if (G[IndicePrix - 1] < temp) G[IndicePrix - 1] = temp;
    }
  }
  Indice = NbrePasPrix / 2;
  delta = (G[Indice] - G[Indice - 1]) / h;
  return (G[Indice - 1] + delta * (Indice * h - 1));
}

/* Exemple :
PutAmericain contrat = {0,360,45};
Modele modele = {0.09,0.3,45};
printf("%f\n",Prix(0,45,contrat,modele));*/

```

### 2.3 L'algorithme de Cox Ross pour le calcul du prix d'une option américaine

Une autre façon courante de calculer le prix du put américain est la méthode de Cox Ross Rubinstein (voir le paragraphe 3.3 du chapitre 5). Nous en donnons ici une implémentation informatique.

```

#include <math.h>
#include <stdio.h>

#define Taille          1000

typedef double Etat[Taille + 1];

typedef struct Option {

```

```

double TauxAnnuel;
double Sigma;
double T;
double ValeurInitiale;
double K;
} Option;

double plus(double x)
{
  return (x>0?x:0);
}

double Prix(Option opt)
{
  double r, a, b, proba, p1, p2, tmp, ro, xmax;
  Etat P, roi;
  long i, j, N;

  /* Calcul des parametres de Cox Ross */
  N = 500;
  r = opt.TauxAnnuel * opt.T / N;
  a = (1 + r) * exp(-opt.Sigma * sqrt(opt.T / N)) - 1;
  b = (1 + r) * exp(opt.Sigma * sqrt(opt.T / N)) - 1;
  proba = (b - r) / (b - a);
  /* par souci d'efficacite on calcule
  le maximum de choses en dehors de la boucle principale */
  ro = (1 + a) / (1 + b);
  roi[0] = 1.0;
  for (i = 1; i <= N; i++)
    roi[i] = ro * roi[i - 1];
  p1 = (1 - proba) / (1 + r);
  p2 = proba / (1 + r);
  /* A un instant j, P[i] approxime P(j,x(1+a)^i (1+b)^(N-j-i)) */
  /* en N : P[i] = (K-x(1+a)^i (1+b)^(N-i))+ */
  xmax = opt.ValeurInitiale * pow(1 + b, N);
  for (i = 0; i <= N; i++)
    P[i] = plus(opt.K - xmax * roi[i]);
  for (j = 1; j <= N; j++) {
    xmax /= 1 + b;
    for (i = 0; i <= N - j; i++) {
      P[i] = p1 * P[i] + p2 * P[i + 1];
      tmp = plus(opt.K - xmax * roi[i]);
      if (tmp > P[i])
        P[i] = tmp;
    }
  }
  return (P[0]);
}

```

### 3 Exercices

**Exercice 44** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, calculer la loi du couple de variables aléatoires  $(\sqrt{X^2 + Y^2}, \arctg(Y/X))$ . En déduire que si  $U_1$  et  $U_2$  sont deux variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$  et indépendantes, les variables aléatoires  $\sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$  et  $\sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2)$  sont indépendantes et suivent une loi gaussienne centrée réduite.

**Exercice 45** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , telle que  $f(x) > 0$  pour tout  $x$ , et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ . On veut simuler une variable aléatoire  $X$  de loi  $f(x) dx$ . On pose  $F(u) = \int_{-\infty}^u f(x) dx$ . Démontrer que si  $U$  est une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$ , alors la loi de  $F^{-1}(U)$  est  $f(x) dx$ . En déduire une méthode de simulation de  $X$ .

**Exercice 46** On modélise un actif à risque  $S_t$  par l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \\ S_0 = x, \end{cases},$$

où  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard,  $\sigma$  la volatilité et  $r$  est le taux d'intérêt sans risques. Proposer une méthode de simulation permettant d'approcher :

$$\mathbf{E} \left( e^{-rT} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_s ds - S_T \right)_+ \right).$$

Interpréter la valeur précédente en terme d'option.

**Exercice 47** Le but de cet exercice est d'étudier l'influence de la fréquence de couverture sur la variance d'un portefeuille d'options. L'actif par rapport auquel on considère les options est décrit par le modèle de Black et Scholes :

$$\begin{cases} dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \\ S_0 &= x \end{cases}$$

$(W_t)_{t \geq 0}$  désigne un mouvement brownien standard,  $\sigma$  la volatilité annuelle et  $r$  désigne le taux d'intérêt annuel sans risques. On prendra par la suite  $r = 10\%/année$ ,  $\sigma = 20\%/ \sqrt{année} = 0.2$  et  $x = 100$ .

“Se couvrir à delta nul à l'instant  $t$ ” signifie que l'on calcule la quantité d'actif risqué nécessaire à la couverture et que l'on effectue les transactions adéquates (achat ou vente d'actif) pour réaliser cette couverture.

Dans la suite, toutes les options décrites auront une échéance de 3 mois et porteront sur une unité d'actif. On choisira l'une des combinaisons d'options suivantes :

- **Bull spread** : constituée de l'achat d'un call de prix d'exercice 90 (abrégié en call 90) et de la vente d'un call 110 de même échéance.
- **Strangle** : constituée de la vente d'un put 90 et de la vente d'un call 110.
- **Condor** : constituée de la vente d'un call 90, de l'achat d'un call 95 et d'un call 105 et de la vente d'un call 110.
- **Put ratio backspread** : constituée de la vente d'un put 110 et de l'achat de 3 puts 90.

On considérera que, à l'instant 0, l'opérateur encaisse (ou décaisse) les primes et qu'il doit par la suite constituer un portefeuille autofinancé.

On suppose d'abord que  $\mu = r$ . On demande d'écrire un programme qui :

- simule l'actif décrit précédemment
- calcule la moyenne et la variance de la valeur finale actualisée du portefeuille dans les cas suivants :
  - On ne se couvre pas du tout : on vend l'option, on touche la prime, on attend 3 mois, on tient compte de l'exercice de l'option vendue et on calcule la valeur du portefeuille.
  - On se couvre immédiatement après la vente de l'option, puis on ne fait rien.
  - On se couvre immédiatement après la vente, puis tous les mois.
  - On se couvre immédiatement après la vente, puis tous les 10 jours.
  - On se couvre immédiatement après la vente, puis tous les jours.

Etudier l'influence de la fréquence de discrétisation.

On reprendra la simulation précédente en supposant que  $\mu \neq r$  (prendre des valeurs de  $\mu$  supérieures et inférieures à  $r$ ). Y a-t-il des opportunités d'arbitrage ?

**Exercice 48** On suppose que  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien standard et que  $(U_i)_{i \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes valant  $+1$  ou  $-1$  avec probabilité  $1/2$ . On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

1. Démontrer que, si que  $X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$ ,  $X_t^n$  tend en loi vers  $W_t$ .

2. Soient  $t$  et  $s$  deux réels positifs, en utilisant le fait que la variable aléatoire  $X_{t+s}^n - X_t^n$  est indépendante de  $X_t^n$ , démontrer que le couple  $(X_{t+s}^n, X_t^n)$  tend, en loi, vers  $(W_{t+s}, W_t)$ .
3. Si  $0 < t_1 < \dots < t_p$ , démontrer que  $(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_p}^n)$  tend en loi vers  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_p})$ .



# Appendice

## 1 Variables aléatoires gaussiennes

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principales propriétés des gaussiennes. On trouvera les démonstrations des résultats dans [Bou86], chapitre VI, paragraphe 9.

### 1.1 Gaussiennes réelles

Une variable aléatoire réelle  $X$  est appelée gaussienne centrée réduite si elle admet pour densité la fonction

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

La loi de  $X$  est alors appelée loi normale centrée réduite.

Si  $X$  est une gaussienne centrée réduite et si  $m$  et  $\sigma$  sont des nombres réels, la variable aléatoire  $Y = m + \sigma X$  est appelée gaussienne de paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ . La loi de  $Y$  est la loi normale de paramètres  $m$  et  $\sigma^2$ , notée  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  (cette loi ne dépend pas du signe de  $\sigma$  car  $X$  et  $-X$  ont même loi). Les paramètres  $m$  et  $\sigma^2$  sont respectivement la moyenne et la variance de  $Y$ . Si  $\sigma \neq 0$ , la densité de  $Y$  est donnée par la fonction  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ . Si  $\sigma = 0$ , la loi de  $Y$  est la mesure de Dirac en  $m$  et n'a donc pas de densité; on parle parfois, dans ce cas, de gaussienne "dégénérée".

Si  $X$  est une gaussienne centrée réduite, pour tout nombre complexe  $z$ , on a

$$\mathbf{E}\left(e^{zX}\right) = e^{\frac{z^2}{2}}.$$

La fonction caractéristique de  $X$  est donc donnée par  $\phi_X(u) = e^{-u^2/2}$  et celle d'une gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$  par  $\phi_Y(u) = e^{i um} e^{-u^2 \sigma^2 / 2}$ . Il est utile de savoir que si  $X$  suit la loi normale centrée réduite, on a  $\mathbf{P}(|X| > 1, 96 \dots) = 0, 05$  et  $\mathbf{P}(|X| > 2, 6 \dots) = 0, 01$ . Pour les grandes valeurs de  $t > 0$ , l'estimation suivante est intéressante :

$$\mathbf{P}(X > t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty x e^{-x^2/2} dx = \frac{e^{-t^2/2}}{t\sqrt{2\pi}}.$$

Rappelons qu'il existe de très bonnes approximations de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (cf. chapitre 8) ainsi que des tables statistiques (cf. par exemple [Bou86]).

### 1.2 Vecteurs gaussiens

**Définition 1.1** Une variable aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_d)$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$  est appelée vecteur gaussien, si pour tous réels  $a_1, \dots, a_d$ , la variable aléatoire réelle  $\sum_{i=1}^d a_i X_i$  est une gaussienne.

Les composantes  $X_1, \dots, X_d$  d'un vecteur gaussien sont évidemment des gaussiennes, mais il ne suffit pas que les coordonnées d'un vecteur soient gaussiennes pour que le vecteur soit gaussien. Par contre, si  $X_1, X_2, \dots, X_d$  sont des gaussiennes réelles *indépendantes*, alors le vecteur  $(X_1, \dots, X_d)$  est gaussien.

La matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_d)$  est la matrice  $\Gamma(X) = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$  dont les coefficients sont donnés par :

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) = \mathbf{E}[(X_i - \mathbf{E}(X_i))(X_j - \mathbf{E}(X_j))].$$

On sait que, si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes, la matrice  $\Gamma(X)$  est diagonale, et que la réciproque est fautive en général, mais vraie dans le cas gaussien :

**Théorème 1.2** *Soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur gaussien à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$ . Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_d$  sont indépendantes si et seulement si la matrice de variance-covariance du vecteur  $X$  est diagonale.*

On trouvera une démonstration de ce résultat dans [Bou86], chapitre VI, p. 155.

**Remarque 1.3** L'importance des gaussiennes pour la modélisation vient notamment du théorème central-limite (cf. [Bou86], chapitre VII, paragraphe 4). Pour l'estimation statistiques des gaussiennes, on pourra se reporter à [DCD82] (chapitre 5) et, pour leur simulation, au chapitre 8.

## 2 Espérance conditionnelle

### 2.1 Exemples de sous-tribus

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable et soient  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ,  $n$  éléments de la tribu  $\mathcal{A}$  formant une partition de  $\Omega$ . La famille  $\mathcal{B}$  des éléments de  $\mathcal{A}$  qui sont vides ou de la forme  $B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \dots \cup B_{i_k}$ , avec  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ , forme une sous-tribu finie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ , qui n'est autre que la tribu engendrée par les  $B_i$ .

Réciproquement, à toute sous-tribu finie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$ , on peut associer une partition finie  $(B_1, \dots, B_n)$  de  $\Omega$  par des éléments de  $\mathcal{A}$ , qui engendrent  $\mathcal{B}$  : les  $B_i$  sont les éléments non vides de  $\mathcal{B}$  qui ne contiennent pas d'autre élément de  $\mathcal{B}$  qu'eux-mêmes et la partie vide. On les appelle les atomes de  $\mathcal{B}$ . Il y a donc une correspondance biunivoque entre sous-tribus finies de  $\mathcal{A}$  et partitions finies de  $\Omega$  par des éléments de  $\mathcal{A}$ . Noter que si  $\mathcal{B}$  est une sous-tribu finie de  $\mathcal{A}$ , une application de  $\Omega$  dans  $\mathbf{R}$  (muni de sa tribu borélienne) est  $\mathcal{B}$ -mesurable si et seulement si elle est constante sur chacun des atomes de  $\mathcal{B}$ .

Soit maintenant une variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ . La tribu engendrée par  $X$  est la plus petite tribu rendant l'application  $X$  mesurable : on la note  $\sigma(X)$ . C'est évidemment une sous-tribu de  $\mathcal{A}$  et il est facile de voir que

$$\sigma(X) = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists B \in \mathcal{E}, A = X^{-1}(B) = \{X \in B\}\}.$$

On démontre qu'une variable aléatoire  $Y$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , à valeurs dans un espace mesurable  $(F, \mathcal{F})$  est  $\sigma(X)$ -mesurable, si et seulement si elle est de la forme

$$Y = f \circ X,$$

où  $f$  est une application mesurable de  $(E, \mathcal{E})$  dans  $(F, \mathcal{F})$  (cf. [Bou86], p.101-102). Autrement dit, les variables aléatoires  $\sigma(X)$ -mesurables sont exactement les fonctions mesurables de  $X$ .

## 2.2 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace de probabilité et soit  $\mathcal{B}$  une sous-tribu de  $\mathcal{A}$ . La définition de l'espérance conditionnelle repose sur le théorème suivant (pour une démonstration, cf. [Bou86], chapitre 8).

**Théorème 2.1** *Pour toute variable aléatoire réelle intégrable  $X$ , il existe une variable aléatoire réelle, intégrable  $\mathcal{B}$ -mesurable,  $Y$ , unique aux ensembles négligeables près, telle que :*

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \mathbf{E}(X\mathbf{1}_B) = \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_B).$$

$Y$  est appelée espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{B}$  et notée  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ .

Si  $\mathcal{B}$  est une sous-tribu finie, d'atomes  $B_1, \dots, B_n$ , on a  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \sum_i \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{B_i})}{\mathbf{P}(B_i)} \mathbf{1}_{B_i}$ , la somme étant limitée aux atomes de probabilité non nulle. Ainsi, sur chaque atome  $B_i$ , la valeur de  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  est la valeur moyenne de  $X$  sur  $B_i$ . Dans le cas de la tribu grossière ( $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ ), on a  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(X)$ .

Le maniement des espérances conditionnelles repose sur les propriétés suivantes.

1. Si  $X$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable,  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = X$ , p.s..
2.  $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbf{E}(X)$ .
3. Pour toute variable aléatoire  $Z$   $\mathcal{B}$ -mesurable et bornée,  $\mathbf{E}(ZE(X|\mathcal{B})) = \mathbf{E}(ZX)$ .
4. Linéarité :

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y|\mathcal{B}) = \lambda \mathbf{E}(X|\mathcal{B}) + \mu \mathbf{E}(Y|\mathcal{B}) \text{ p.s..}$$

5. Positivité : si  $X \geq 0$ , alors  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$  p.s. et, plus généralement,  $X \geq Y \Rightarrow \mathbf{E}(X|\mathcal{B}) \geq \mathbf{E}(Y|\mathcal{B})$  p.s.. De cette propriété, on déduit que

$$|\mathbf{E}(X|\mathcal{B})| \leq \mathbf{E}(|X|\mathcal{B}) \text{ p.s.}$$

et donc que  $\|\mathbf{E}(X|\mathcal{B})\|_{L^1(\Omega)} \leq \|X\|_{L^1(\Omega)}$ ,

6. Si  $\mathcal{C}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{B}$ , alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})|\mathcal{C}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{C}) \text{ p.s..}$$

7. Si  $Z$  est  $\mathcal{B}$ -mesurable et bornée,  $\mathbf{E}(ZX|\mathcal{B}) = Z\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  p.s..
8. Si  $X$  est indépendante de  $\mathcal{B}$  alors,  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(X)$  p.s..

La réciproque de cette propriété est fautive, mais on a le résultat suivant.

**Proposition 2.2** *Soit  $X$  une variable aléatoire réelle.  $X$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{B}$  si et seulement si :*

$$\forall u \in \mathbf{R} \quad \mathbf{E}(e^{iuX}|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(e^{iuX}) \text{ p.s..} \quad (8.4)$$

**Démonstration :** Compte tenu de la propriété 8 ci-dessus, il suffit de montrer que (8.4) entraîne l'indépendance. Or, si  $\mathbf{E}(e^{iuX}|\mathcal{B}) = \mathbf{E}(e^{iuX})$ , on a, pour tout  $B \in \mathcal{B}$ ,  $\mathbf{E}(e^{iuX}\mathbf{1}_B) = \mathbf{E}(e^{iuX})\mathbf{P}(B)$ , par définition de l'espérance conditionnelle. Si  $\mathbf{P}(B) \neq 0$ , on peut écrire que

$$\mathbf{E}\left(e^{iuX} \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbf{P}(B)}\right) = \mathbf{E}(e^{iuX}).$$

Cette égalité signifie que la fonction caractéristique de  $X$  est la même sous la probabilité  $\mathbf{P}$  et sous la probabilité de densité  $\frac{\mathbf{1}_B}{\mathbf{P}(B)}$  par rapport à  $\mathbf{P}$ . L'égalité des fonctions caractéristiques entraîne l'égalité des lois et, par conséquent,

$$\mathbf{E} \left( f(X) \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbf{P}(B)} \right) = \mathbf{E} (f(X)),$$

pour toute fonction borélienne bornée, ce qui entraîne l'indépendance. ■

**Remarque 2.3** Si  $X$  est de carré intégrable, il en est de même de  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  et  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  coïncide avec la projection orthogonale de  $X$  sur  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ , considéré comme sous-espace fermé de  $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , muni du produit scalaire  $(X, Y) \mapsto \mathbf{E}(XY)$  (cf. [Bou86], chapitre VIII, paragraphe 2). L'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{B}$  apparaît alors comme la meilleure approximation de  $X$  au sens des moindres carrés par une variable aléatoire  $\mathcal{B}$ -mesurable de carré intégrable. En particulier, si  $\mathcal{B}$  est la tribu engendrée par une variable aléatoire  $\xi$ , l'espérance conditionnelle  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$ , qui est alors notée  $\mathbf{E}(X|\xi)$ , est la meilleure approximation de  $X$  par une fonction de  $\xi$ , puisque les variables aléatoires  $\sigma(\xi)$ -mesurables sont les fonctions mesurables de  $\xi$ . Noter que l'on a (en utilisant le théorème de Pythagore !)  $\|\mathbf{E}(X|\mathcal{B})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|X\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ .

**Remarque 2.4** On peut aussi définir  $\mathbf{E}(X|\mathcal{B})$  pour toute variable aléatoire  $X$  positive (sans condition d'intégrabilité). On a alors  $\mathbf{E}(XZ) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathcal{B})Z)$ , pour toute variable aléatoire  $Z$   $\mathcal{B}$ -mesurable positive et les règles de calcul sont essentiellement les mêmes que dans le cas intégrable (cf. [DCD82], chapitre 6).

## 2.3 Calculs d'espérances conditionnelles

La proposition suivante est très souvent utilisée dans ce livre.

**Proposition 2.5** Soit  $X$  une variable aléatoire  $\mathcal{B}$ -mesurable à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  et soit  $Y$  est une variable aléatoire indépendante de  $\mathcal{B}$ , à valeurs dans  $(F, \mathcal{F})$ . Pour toute fonction  $\Phi$  borélienne, positive (ou bornée) sur  $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ , la fonction  $\varphi$  définie par :

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = \mathbf{E}(\Phi(x, Y))$$

est borélienne sur  $(E, \mathcal{E})$  et on a :

$$\mathbf{E}(\Phi(X, Y)|\mathcal{B}) = \varphi(X) \text{ p.s..}$$

La signification de cette proposition est que, sous les hypothèses énoncées, on peut calculer  $\mathbf{E}(\Phi(X, Y)|\mathcal{B})$  en faisant comme si  $X$  était une constante.

**Démonstration :** Notons  $\mathbf{P}_Y$  la loi de  $Y$ . On a :

$$\varphi(x) = \int_F \Phi(x, y) d\mathbf{P}_Y(y)$$

et la mesurabilité de  $\Phi$  résulte du théorème de Fubini. Soit maintenant  $Z$  une variable aléatoire  $\mathcal{B}$ -mesurable positive (par exemple  $Z = \mathbf{1}_B$ , avec  $B \in \mathcal{B}$ ). Si on note  $\mathbf{P}_{X,Z}$  la loi du couple  $(X, Z)$ , on a, en utilisant l'indépendance de  $Y$  et du vecteur  $(X, Z)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Phi(X, Y)Z) &= \iint \Phi(x, y)z d\mathbf{P}_{X,Z}(x, z) d\mathbf{P}_Y(y) \\ &= \int \left( \int \Phi(x, y) d\mathbf{P}_Y(y) \right) z d\mathbf{P}_{X,Z}(x, z) \\ &= \int \varphi(x)z d\mathbf{P}_{X,Z}(x, z) \\ &= \mathbf{E}(\varphi(X)Z), \end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat annoncé. ■

**Remarque 2.6** Dans un cadre gaussien, le calcul d'une espérance conditionnelle est particulièrement simple. En effet, si  $(Y, X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un vecteur gaussien (à valeurs dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ ), l'espérance conditionnelle  $Z = \mathbf{E}(Y|X_1, \dots, X_n)$  est de la forme :

$$Z = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i,$$

où les  $c_i$  sont des constantes réelles. Cela signifie que la fonction des  $X_i$  qui approche au mieux  $Y$  est une fonction affine et que l'on peut calculer  $Z$  en projetant dans  $L^2$  la variable aléatoire  $Y$  sur le sous-espace vectoriel linéairement engendré par la constante  $\mathbf{1}$  et les  $X_i$  (cf. [Bou86], chapitre 8, paragraphe 5).

### 3 Théorème de séparation des convexes

Dans ce paragraphe, nous donnons la version du théorème de séparation des convexes utilisée dans le chapitre 1. Pour plus de détails sur ces questions, on pourra consulter l'annexe de [Min83]. On a tout d'abord l'énoncé suivant.

**Théorème 3.1** *Soit  $C$  un convexe fermé ne contenant pas l'origine. Il existe une forme linéaire  $\xi$ , sur  $\mathbf{R}^n$  et  $\alpha > 0$  tels que :*

$$\forall x \in C \quad \xi(x) \geq \alpha.$$

*L'hyperplan  $\xi(x) = 0$  ne rencontre donc pas  $C$ .*

**Démonstration :** Soit  $\lambda$  un réel positif tel que la boule fermée  $B(\lambda)$  centrée à l'origine et de rayon  $\lambda$  rencontre  $C$  et soit  $x_0$ , réalisant le minimum de la fonction continue  $x \mapsto \|x\|$  (où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne) sur le compact  $C \cap B(\lambda)$ . On a immédiatement :

$$\forall x \in C \quad \|x\| \geq \|x_0\|.$$

Le vecteur  $x_0$  n'est autre que la projection de l'origine sur le convexe fermé  $C$ . Soit maintenant  $x \in C$ , on a, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $x_0 + t(x - x_0) \in C$ , puisque  $C$  est convexe. En développant les deux membres de l'inégalité

$$\|x_0 + t(x - x_0)\|^2 \geq \|x_0\|^2,$$

et en notant  $x_0 \cdot x$  le produit scalaire de  $x_0$  et  $x$ , on obtient l'inégalité  $x_0 \cdot x \geq \|x_0\|^2 > 0$ , pour tout  $x \in C$ , ce qui donne immédiatement le résultat annoncé. ■

**Théorème 3.2** *Soit  $K$  un convexe compact et soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{R}^n$ , disjoint de  $K$ . Il existe une forme linéaire  $\xi$ , sur  $\mathbf{R}^n$ , vérifiant les deux conditions suivantes :*

1.  $\forall x \in K \quad \xi(x) > 0.$
2.  $\forall x \in V \quad \xi(x) = 0.$

*Le sous-espace  $V$  est donc contenu dans un hyperplan qui ne rencontre pas  $K$ .*

**Démonstration :** L'ensemble

$$C = K - V = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists (y, z) \in K \times V, x = y - z\}$$

est convexe, fermé (car  $V$  est fermé et  $K$  est compact) et ne contient pas l'origine. D'après le théorème 3.1, on peut donc trouver une forme linéaire  $\xi$  sur  $\mathbf{R}^n$  et  $\alpha > 0$  tels que :

$$\forall x \in C \quad \xi(x) \geq \alpha.$$

D'où :

$$\forall y \in K, \forall z \in V \quad \xi(y) - \xi(z) \geq \alpha. \quad (8.5)$$

En fixant  $y$  et en appliquant (8.5) à  $\lambda z$ , avec  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on obtient :  $\forall z \in V \quad \xi(z) = 0$ , puis  $\forall y \in K \quad \xi(y) \geq \alpha$ , ce qui achève la démonstration. ■

## Bibliographie

- [AD89] P. Artzner et F. Delbaen. Term structure of interest rates : The martingale approach. *Advances in Applied Mathematics*, 10 :95–129., 1989.
- [AS70] M. Abramowitz et I.A. Stegun, éditeurs. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 9th edition, 1970.
- [Bac00] L. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 17 :21–86, 1900.
- [BAW87] G. Barone-Adesi et R. Whaley. Efficient analytic approximation of american option values. *Journal of Finance*, 42 :301–320, 1987.
- [Ben84] A. Bensoussan. On the theory of option pricing. *Acta Appl. Math.*, 2 :139–158, 1984.
- [BL78] A. Bensoussan et J.L. Lions. *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*. Dunod, 1978.
- [BL89] N. Bouleau et D. Lamberton. Residual risks and hedging strategies in markovian markets. *Stoch. Proc. and Appl.*, 33 :131–150, 1989.
- [Bou86] N. Bouleau. *Probabilités de l'Ingénieur*. Hermann, 1986.
- [Bou88] N. Bouleau. *Processus Stochastiques et Applications*. Hermann, 1988.
- [BS73] F. Black et M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 :635–654, 1973.
- [BS77] M.J. Brennan et E.S. Schwartz. The valuation of the american put option. *J. of finance*, 32 :449–462, 1977.
- [BS79] M.J. Brennan et E.S. Schwartz. A continuous time approach to the pricing of bonds. *J. of Banking and Finance*, 3 :133–155, 1979.
- [CER88] CERMA. Sur les risques résiduels des stratégies de couverture d'actifs conditionnels. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 307 :625–630, 1988.
- [Cha90] O. Chateau. *Quelques remarques sur les processus à accroissements indépendants et stationnaires, et la subordination au sens de Bochner*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1990.
- [Cia88] P.G. Ciarlet. *Une Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1988.
- [CIR85] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, et S.A. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53 :385–407, 1985.
- [Cou82] G. Courtadon. The pricing of options on default-free bonds. *J. of Finan. and Quant. Anal.*, 17 :301–329, 1982.
- [CR85] J.C. Cox et M. Rubinstein. *Options Markets*. Prentice–Hall, London, 1985.

- [DCD82] D. Dacunha-Castelle et M. Duflo. *Probabilités et statistiques, tome 1, Problèmes à temps fixe*. Masson, 1982.
- [DCD83] D. Dacunha-Castelle et M. Duflo. *Probabilités et statistiques, tome 2, Problèmes à temps mobile*. Masson, 1983.
- [DMW90] R.C. Dalang, A. Morton, et W. Willinger. Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models,. *Stochastics and Stochastics Reports*, 29(2) :185–202, 1990.
- [DS94] F. Delbaen et W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300 :463–520, 1994.
- [Duf88] D. Duffie. *Security Markets, Stochastic Models*. Academic Press, 1988.
- [Fri75] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications*. Academic Press, 1975.
- [FS86] H. Föllmer et D. Sondermann. Hedging of non redundant contingent claims. Dans W.Hildebrand et A. Mas-Colell, éditeurs, *Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gerard Debreu*. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [FS91] H. Föllmer et M. Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information. Dans M.H.A. Davis et R.J. Elliott, éditeurs, *Applied Stochastic Analysis*, volume 5 de *Stochastics Monographs*, pages 389–414. Gordon and Breach, 1991.
- [Gar88] T. Gard. *Introduction to Stochastic Differential Equation*. Marcel Dekker, 1988.
- [GLT76] R. Glowinsky, J.L. Lions, et R. Trémolières. *Analyse numérique des inéquations variationnelles*. Dunod, 1976.
- [GS80] I.I. Gihman et A.V. Skorohod. *Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires*. Mir, 1980.
- [HJM87] D. Heath, A. Jarrow, et A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates. *preprint*, 1987.
- [HK79] M.J. Harrison et D.M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J. of Economic Theory*, 29 :381–408, 1979.
- [HL86] T.S. Ho et S.B. Lee. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *J. of Finance*, 41 :1011–1029, 1986.
- [HL88] C.F. Huang et R.H. Litzenberger. *Foundations for Financial Economics*. North-Holland, New-York, 1988.
- [HP81] M.J. Harrison et S.R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11 :215–260, 1981.
- [HP83] M.J. Harrison et S.R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading : complete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, 15 :313–316, 1983.
- [IW81] N. Ikeda et S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations And Diffusion Processes*. North-Holland, Tokyo, 1981.
- [Jam89] F. Jamshidian. An exact bond pricing formula. *Journal of Finance*, 44 :205–209, 1989.
- [JLL90] P. Jaillet, D. Lamberton, et B. Lapeyre. Variationnal inequalities and the pricing of american options. *Acta Applicandae Mathematicae*, 21 :263–289, 1990.
- [Kar81] N. El Karoui. Les aspects probabilistes du contrôle stochastique. *Lecture Notes in Mathematics (Springer)*, 876 :72–238,, 1981.



- [Kar88] I. Karatzas. On the pricing of american options. *Applied Mathematics and Optimization*, 17 :37–60, 1988.
- [Kar89] I. Karatzas. Optimization problems in the theory of continuous trading. *SIAM J. Control Optim.*, 27 :1221–1259, 1989.
- [Knu81] D.E. Knuth. *The Art of Computer programming, Vol. 2, Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, 1981.
- [KP92] P.E. Kloeden et E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, 1992.
- [KQ95] N. EL Karoui et M.C. Quenez. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. *S.I.A.M. J. Control and Optimization*, 33 :29–66, 1995.
- [KR89] N. El Karoui et J.C. Rochet. A pricing formula for options on coupon-bonds. *Cahier de recherche du GREMAQ-CRES*, 8925, 1989.
- [KS88] I. Karatzas et S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New-York, 1988.
- [Kus77] H.J. Kushner. *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations*. Academic Press, New York, 1977.
- [L'E90] P. L'Ecuyer. Random numbers for simulation. *Communications of the ACM*, 33, 10 1990.
- [LP90] D. Lamberton et G. Pagés. Sur l'approximation des réduites. *Annales de l'IHP*, 26 :331–355, 1990.
- [Mer73] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. of Econom. and Management Sci.*, 4 :141–183, 1973.
- [Mer76] R.C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *J. of Financial Economics*, 3 :125–144, 1976.
- [Mil86] Mac Millan. Analytic approximation for the american put price. *Advances in Futures and Options Research*, 1 :119–139, 1986.
- [Min83] M. Minoux. *Programmation mathématique, 2 tomes*. Dunod, 1983.
- [Mor89] A.J. Morton. *Arbitrage and Martingales*. PhD thesis, Cornell University, 1989.
- [Nev72] J. Neveu. *Martingales à temps discret*. Masson, 1972.
- [PT85] E. Pardoux et D. Talay. Discretization and simulation of stochastic differential equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, 3 :23–47, 1985.
- [RT83] P.A. Raviart et J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [RW87] L.C.G. Rogers et D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales, Tome 2, Itô Calculus*. John Wiley and Sons, New York, 1987.
- [RY90] A. Revuz et M. Yor. *Continuous Martingale Calculus*. Springer-Verlag, 1990.
- [Sch89] M. Schweizer. Option hedging for semi-martingales. *Stoch. Proc. and Appl.*, 1989.
- [Sch92] M. Schweizer. Mean-variance hedging for general claims. *Annals of Applied Probability*, 2 :171–179, 1992.
- [Sch94] M. Schweizer. Approximating random variables by stochastic integrals. *Ann. Probab.*, 22(3) :1536–1575, 1994.

- [Sch95] M. Schweizer. On the minimal martingale measure and the foellmer-schweizer decomposition. *Stochastic Anal. Appl.*, 13(5) :573–599, 1995.
- [Sed87] R. Sedgewick. *Algorithms*. Addison–Wesley, 1987.
- [SS84] S. Schaefer et E.S. Schwartz. A two-factor model of the term structure : an approximate analytical solution. *J. of Finan. and Quant. Anal.*, 19 :413–424, 1984.
- [Str90] C. Stricker. Arbitrage et lois de martingales. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 26 :451–460, 1990.
- [Tal95] D. Talay. Simulation of stochastic differential systems. Dans Paul Krée et Walter Wedig, editeurs, *Probablistic Methods in Applied Physics*, volume 451 de *Lecture Notes in Physics*, pages 54–96, Berlin Heidelberg, 1995. Springer.
- [Zha97] X.L. Zhang. Numerical analysis of american option pricing in a jump-diffusion model. *Mathematics of Operations Research*, 1997. à paraître.

# Index

- Actif
  - à risques, 13
  - conditionnel, 19
  - fi nancier, 13
  - sans risque, 13, 118
  - sous-jacent, 9
- Adapté, 16
- Algorithme
  - de Brennan et Schwartz, 112, 156
  - de Cox Ross Rubinstein, 113, 157
- Arbitrage, 10
- Atome, 162
- Bessel (fonction de), 126
- Calcul de Itô, 50
- Call, 9
- Complet, 20
- Courbe des taux, 117, 127
- Couverture, 10
  - absence de couverture parfaite, 148
  - d'un call, 25
  - d'un put américain, 36
  - des calls et des puts, 74, 144–147
- Décomposition de Doob, 30
- Delta, 75
- Echéance, 9
- Enveloppe de Snell, 28
- Equations aux dérivées partielles
  - paraboliques, 95, 98
  - résolution numérique, 104
  - sur un ouvert borné, 101
- Equations différentielles
  - stochastiques, 56–58
- Espérance conditionnelle, 162
  - cas gaussien, 165
  - d'une variable aléatoire positive, 164
  - et projection orthogonale, 164
  - par rapport à une variable aléatoire, 164
- Filtration, 13, 40
  - naturelle, 40
- Formule d'intégration par parties, 53
- Formule d'Itô, 51
  - multidimensionnelle, 54
- Formules de Black-Scholes, 73
- Générateur infinitésimal, 109
- Générateurs de nombres aléatoires, 150
- Gamma, 75
- Gaussienne, 161
  - gaussienne
    - centrée réduite, 161
- Girsanov (théorème de), 70, 80
- Inégalité de Doob, 44
- Inéquation
  - aux dérivées partielles, 108
  - en dimension finie, 110–112
  - méthode numérique, 110
- Inéquations
  - aux dérivées partielles, 109
- Intégrale stochastique, 45
- Loi
  - du chi-deux décentré, 125
  - exponentielle, 133, 134
  - gamma, 134
  - log-normale, 67
  - normale, 161
- Méthode
  - de Monte Carlo, 149
- Méthodes numériques
  - algorithme de Brennan et Schwartz, 112, 156
  - différences finies, 104
  - fonction de répartition d'une loi gaussienne, 155
  - inéquation, 110
  - inéquation en dimension finie, 112
  - Méthode de Cox Ross Rubinstein, 113, 157
  - méthode de Gauss, 106
  - méthode de Mac Millan et de Barone-Adesi et Waley, 114
- Marché
  - complet, 20
  - non complet, 133, 148
  - viable, 17

- Martingale, 16
  - à temps continu, 42
  - exponentielle, 42, 54
  - Théorème d'arrêt, 43
- Modèle
  - avec sauts, 133–148
    - simulation, 154
  - de Black-Scholes, 11, 54, 67–83
    - simulation, 154
  - de courbe des taux, 127
  - de Cox-Ingersoll-Ross, 124–127
  - de Cox-Ross-Rubinstein, 23
  - de taux d'intérêt, 117–131
  - de Vasicek, 122–124
  - discret, 13
- Mouvement brownien, 41
  - Simulation de processus, 153
- Obligation, 117
- Opérateur de Dynkin, 98
- Option, 9
  - américaine, 9
  - asiatique, 19
  - européenne, 9, 19
  - simulable, 19, 71
- Parité (relation de parité call-put), 10, 24
- Poisson(processus de), 133
- Prévisible, 13, 16
- Pricing, 10
- Prix
  - critique, 80
  - d'exercice, 10
  - d'un call, 143
  - d'un call américain, 34
  - d'un call européen, 73, 77
  - d'un put, 143
  - d'un put américain, 35
  - d'un put européen, 73
  - d'un put perpétuel, 78
  - d'une obligation, 119, 123, 126
  - d'une option américaine, 22
  - d'une option européenne, 21, 72, 143
  - d'une option sur obligation, 121, 129
- Probabilités équivalentes, 17, 69
- Processus
  - à temps continu, 39
  - d'Ornstein-Uhlenbeck, 58
  - de Poisson, 133
  - mouvement brownien, 41
- Processus d'Itô, 50
- Propriété de Markov, 59–61
- Put, 9
  - inéquation aux dérivées partielles, 109
  - perpétuel, 78
- Radon-Nikodym (théorème de), 69
- Représentation des martingales, 70
- Séparation des convexes, 165
- Simulable, 19
- Simulation de processus, 152
  - équations diff. stochastiques, 153
  - modèle avec sauts, 154
  - modèle de Black-Scholes, 154
  - mouvement brownien, 153
- Simulation des variables aléatoires, 150
  - gaussienne, 151
  - variable exponentielle, 151
  - variable poissonnienne, 151
  - vecteur gaussien, 152
- Sous-tribu, 162
- Sousmartingale, 16
- Stratégie, 13
  - admissible, 15, 71, 120, 141
  - autofinancée, 14, 68, 120, 141
  - de consommation, 36, 76
- Suite arrêtée, 27
- Surmartingale, 16
- Taux d'intérêt forward, 127
- Temps d'arrêt, 27, 40
  - optimal, 30
  - temps d'atteinte, 43
- Théorème d'arrêt, 43
- Thêta, 75
- Transformée de martingale, 16
- Véga, 75
- Valeur d'un portefeuille, 14
- Vente à découvert, 15
- Viable, 17
- Volatilité, 11, 74
  - implicite, 74