

ESILV
Mathématiques et Ingénierie Financière

Modélisation et évolution
de la surface de volatilité implicite
issue de l'observation des options européennes
dans le cadre du modèle de Black & Scholes

Benjamin DE AMARAL

26 janvier 2003

L'objectif du présent rapport est de présenter au lecteur le modèle de Black et Scholes permettant d'évaluer des options européennes. On se propose également de présenter un programme C++ basé sur ce modèle et permettant de déduire des prix de cotation des options une surface de volatilité implicite. On effectuera alors une analyse en composantes principales sur le smile de volatilité obtenu afin d'en étudier les déformations. Le lecteur est invité à suivre l'évolution du programme à travers ce rapport, de l'étude théorique du modèle à la conception des classes et méthodes pour aboutir aux résultats pratiques.

L'objectif est d'accompagner le lecteur dans la découverte d'un modèle couramment utilisé dans le monde de la finance ainsi que de l'aider à comprendre comment l'implémenter efficacement afin d'en exploiter toutes les ressources. Ce projet est également un excellent exercice pour apprendre à maîtriser des outils informatiques et scientifiques: STL, GSL, gnuplot...

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 3 |
| 2 | Connaissances requises | 4 |
| 2.1 | Mouvement Brownien | 4 |
| 2.2 | Processus de diffusion | 5 |
| 2.3 | Equation de la chaleur | 6 |
| 3 | Modèle de Black-Scholes et valeur d'une option européenne | 7 |
| 3.1 | Hypothèses générales | 7 |
| 3.2 | Modèle de Black-Scholes | 8 |
| 3.3 | Evaluation d'une option | 8 |
| 3.4 | Stratégie Δ -neutre | 9 |
| 3.5 | Stratégie de réplication | 10 |
| 4 | Résolution de l'EDP de Black-Scholes | 11 |
| 4.1 | Equation de la chaleur | 11 |
| 4.2 | Solutions particulières | 12 |
| 5 | Programme C++ d'évaluation d'options européennes | 15 |
| 5.1 | Modèle à implémenter | 15 |
| 5.2 | Volatilité implicite | 16 |
| 5.3 | Estimation avec données réelles | 17 |
| 5.3.1 | Structures | 18 |
| 5.3.2 | Listes STL | 19 |
| 5.3.3 | Etapes de calculs | 21 |
| 6 | Etude des résultats | 24 |
| 6.1 | Smile de volatilité implicite | 24 |
| 6.2 | Analyse en composantes principales (ACP) | 26 |
| 6.2.1 | Premier mode de déformation | 26 |
| 6.2.2 | Second mode de déformation | 27 |
| 6.2.3 | Troisième mode de déformation | 28 |
| 7 | Conclusion | 30 |

1 Introduction

Les options sont un des exemples d'une classe d'actifs plus large appelée les actifs conditionnels. Il s'agit d'un actif dont les recettes futures dépendent d'un évènement dont l'issue est incertaine.

Une option d'achat (ou *call*) est un titre financier conditionnel qui donne le droit, mais non l'obligation, d'acheter un actif déterminé, appelé l'actif contingent (ou sous-jacent), à un prix convenu à l'avance (nommé prix d'exercice ou *strike*) à une date d'échéance déterminée T (appelée maturité) ou même avant. De même, l'option de vente (ou *put*) est le droit de vendre l'actif sous-jacent au prix d'exercice à la date d'échéance T ou avant.

L'option est dite *européenne* si elle n'est exerçable qu'à la date d'échéance T , et *américaine* si elle l'est à tout moment jusqu'à T . Les options permettent aux investisseurs de moduler le risque qu'ils prennent par rapport aux actifs sous-jacents.

Le problème traité par Black et Scholes est l'évaluation et la couverture d'une option de type européen sur une action distribuant des dividendes. Le modèle qui en est issu permet alors de définir la valeur d'une option à l'aide de données caractéristiques observées sur le marché : prix de l'actif sous-jacent, taux d'intérêt, taux de dividende, maturité...

La volatilité de l'actif est également un paramètre du modèle et c'est le comportement de cette valeur qui sert de repère pour la prise de décision des traders. La volatilité peut être estimée à l'aide de données historiques (volatilité historique), ou bien elle se déduit des prix de cotations des options observées (volatilité implicite). Le modèle de Black et Scholes étant couramment utilisé dans les salles de marché, les options européennes sont toutes cotées en terme de volatilité implicite et de nombreuses stratégies dynamiques d'investissement et de gestion de portefeuille s'appuient sur l'étude de ce paramètre.

L'objectif de ce projet est la conception, la réalisation et la mise en place d'un programme permettant d'estimer la volatilité implicite dans le modèle de Black et Scholes à l'aide de données réelles observées sur le marché. A partir de l'historique des prix de cotation des options sur l'indice ESX, on se propose de déduire un ensemble de valeurs de volatilité implicite permettant alors de construire une surface en 3D. On est alors en mesure d'étudier l'évolution dans le temps de cette surface et d'observer ses déformations à l'aide d'une analyse en composantes principales (ACP).

Le programme, réalisé en C++, utilise les nombreuses fonctionnalités de la bibliothèque STL, permettant ainsi de gérer facilement et efficacement un grand nombre de données à l'aide de listes chaînées. Le programme fait également appel aux méthodes de la bibliothèque scientifique GSL qui facilite les calculs de type optimisation et algèbre linéaire.

2 Connaissances requises

2.1 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est un des processus stochastiques les plus couramment utilisés car il sert de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt.

Définition : Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $W = \{W(t), t \in \mathfrak{R}_+\}$ un processus stochastique à valeur dans \mathfrak{R} . W est un mouvement Brownien (ou processus de Wiener) si et seulement si :

- Pour tout (t_1, \dots, t_M) , le vecteur $(W(t_1), \dots, W(t_M))$ est gaussien d'espérance nulle.
- Pour tout $t_1 \leq t_2$ $E[W(t_1)W(t_2)] = t_1$

Le mouvement Brownien est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues, ce qui signifie :

- Continuité : la fonction $s \mapsto W_s(t)$ est une fonction continue (presque sûrement).
- Indépendance des accroissements : Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $F_s = (X_u, u \leq s)$.
- Stationnarité des accroissements : Si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

Tout au long du projet, il sera fait usage du terme de mouvement Brownien, sans pour autant préciser qu'il s'agit d'un mouvement Brownien standard, défini par :

- $W_0 = 0$
- $\forall 0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$
- $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les v.a. $\{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}, i = 0, \dots, n - 1\}$ sont indépendantes.

$$W_t \text{ suit une loi normale } N(0, t) : f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Propriétés :

- Symétrie : si W_t est un Brownien, alors $-W_t$ est un Brownien.
- Echelle : si W_t est un Brownien, alors $\forall c > 0$, $\frac{1}{c}W_{c^2t}$ est un Brownien.
- Translation : si W_t est un Brownien, alors $\forall h$, $W_{t+h} - W_t$ est un Brownien.
- Retournement : si W_t est un Brownien sur $[0, T]$, alors $W_T - W_{T-t}$ est un Brownien sur $[0, T]$.
- Comportement à l'infini : si W_t est un Brownien, alors $tW_{\frac{1}{t}}$ est un Brownien.
- **Propriété de Markov** : $\forall f$ intégrable, $E[f(W_t)|W_u, u \leq s] = E[f(W_t)|W_s]$

Les trajectoires du mouvement Brownien sont continues mais ne sont dérivables en aucun point. Les variations du mouvement Brownien sont imprévisibles.

2.2 Processus de diffusion

Définition : On appelle processus de diffusion un processus aléatoire $X(t)_{t \geq 0}$ tel que la variation de $X(t)$ se décompose comme :

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

où μ est appelé la **dérive** (drift) et σ le **coefficient de diffusion**.

On peut alors dire qu'un mouvement Brownien est un processus de diffusion de dérive $\mu(t) = 0$ et de volatilité $\sigma(t) = 1$.

Les trajectoires d'un processus de diffusion ont la même irrégularité que celles du mouvement Brownien.

Propriété : Un processus de diffusion possède des trajectoires continues mais non dérivables en tout point.

Lemme d'Îto :

Si $W(t)$ est un mouvement Brownien et f une fonction de classe C^2 , alors $X_t = f(W_t)$ est un processus de diffusion qui vérifie :

$$dX_t = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt$$

En particulier, sa tendance instantannée vaut : $\mu(t) = \frac{1}{2}f''(W_t)$ et sa volatilité instantannée est égale à $\sigma(t) = f'(w_t)$.

Mais si l'on définit la fonction $f : (t, y) \mapsto f(t, y)$ une application de classe C^2 de $\mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}$ dans \mathfrak{R} , alors :

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t)dt$$

On définit alors la tendance et la volatilité instantannée :

$$\star \mu(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, W_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, W_t)$$

$$\star \sigma(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, W_t)$$

On retrouve alors la forme générale d'un processus de diffusion :

$$dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$$

2.3 Equation de la chaleur

On étudie un modèle d'équation aux dérivées partielles, appelé **Equation de la chaleur** :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(x,t=0) &= h(x) \end{aligned}$$

Où k définit la constante de diffusion, et $h(x)$ la condition de Cauchy.

On note $U(\nu,t)$ l'image par transformée de Fourier de $u(x,t)$, et $H(\nu)$ celle de $h(x)$:

$$\begin{aligned} U(\nu,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-2i\pi\nu x} dx \\ H(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-2i\pi\nu x} dx \end{aligned}$$

On calcule alors les images par TF des éléments de l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &\rightarrow TF \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) e^{-2i\pi\nu x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-2i\pi\nu x} dx = \frac{\partial U}{\partial t}(\nu,t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\rightarrow TF \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) e^{-2i\pi\nu x} dx = (2i\pi\nu)^2 U(\nu,t) \end{aligned}$$

On obtient alors l'équation transformée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(\nu,t) &= k(2i\pi\nu)^2 U(\nu,t) \\ U(\nu,0) &= H(\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} U'_t(\nu,t) + 4k\pi^2\nu^2 U(\nu,t) = 0 \\ U(\nu,0) = H(\nu) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U(\nu,t) = A e^{-4k\pi^2\nu^2 t} \\ U(\nu,0) = H(\nu) \Rightarrow A = H(\nu) \end{cases}$$

Solution de l'équation transformée : $U(\nu,t) = H(\nu) e^{-4k\pi^2\nu^2 t}$

Le résultat est un produit ordinaire de 2 images ; l'inverse de la transformée par Fourier se compose donc du produit de convolution des TF⁻¹ des images :

$$\begin{aligned} H(\nu) &\rightarrow TF^{-1} \rightarrow h(x) \\ e^{-4k\pi^2\nu^2 t} &\rightarrow TF^{-1} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} \end{aligned}$$

Solution générale de l'équation : $u(x,t) = g(x) \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} g(y) dy$$

3 Modèle de Black-Scholes et valeur d'une option européenne

3.1 Hypothèses générales

Avant de définir et d'utiliser le modèle de Black-Scholes, on commence par définir les hypothèses suivantes :

- H1 : Les options sont européennes.
- H2 : Les marchés financiers sont parfaits.
- H3 : Le taux d'intérêt r est constant entre les instants 0 et T , date d'échéance des options.
- H4 : Le sous-jacent est un titre au comptant ne versant aucun dividende ou coupon entre 0 et T .
- H5 : La volatilité σ du titre sous-jacent est constante dans le temps.
- H6 : En temps continu, la rentabilité du sous-jacent suit une loi normale.

Quand le temps s'écoule de façon continue et que le marché financier est supposé ouvert en permanence, l'hypothèse H6 signifie que le logarithme népérien du cours S de l'actif contingent, $\ln(S)$ obéit à une distribution normale et est, par conséquent, régi par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$d(\ln(S)) = \mu dt + \sigma dW_t$$

où μ est l'espérance instantanée (dérive) du processus, σ son écart-type instantané, que l'on appelle volatilité de S , et W_t un mouvement brownien dont l'incrément dW_t est d'espérance nulle et d'écart-type 1.

L'application du Lemme d'Îto à la différentielle $d(\ln(S))$ donne le résultat suivant :

$$\frac{dS}{S} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$$

Ce qui nous donne la valeur du rendement de l'actif S entre t et $t + dt$.

On obtient alors l'espérance instantanée du taux de rentabilité de l'actif S : $\mu + \frac{1}{2}\sigma^2$

Le logarithme de S ayant une distribution Normale, S obéit à une distribution Log-Normale, ce qui est compatible avec l'impossibilité pour le cours d'un actif financier de prendre des valeurs négatives, et le taux de rentabilité instantané de S est distribué normalement (S suit un mouvement Brownien géométrique).

3.2 Modèle de Black-Scholes

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle en temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix β_t à l'instant t). On suppose l'évolution de β_t régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante :

$$d\beta_t = r\beta_t dt$$

Le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r (taux d'intérêt instantané). En posant comme condition initiale $\beta_0 = 1$, on obtient $\beta_t = e^{rt}$, $\forall t \geq 0$.

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}$$

où W_t est un mouvement Brownien standard.

En appliquant le lemme d'Ito à cette équation, on peut alors déduire la variation du cours de l'actif :

$$dS_t = S_t \left[\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t \right]$$

3.3 Evaluation d'une option

Considérons maintenant la valeur $C(t, S_t)$ d'une option de maturité T et dont le sous-jacent est S_t :

$$C(t, S_t) = C(t, S_0 e^{\mu t + \sigma W_t}) = C(t, f(t, W_t)) = g(t, W_t)$$

avec $g : (t, y) \mapsto C(t, f(t, y))$

On calcule les dérivées partielles de la fonction g avant d'appliquer le théorème d'Ito :

$$\begin{aligned} \star \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) &= \frac{\partial C}{\partial t}(t, f(t, y)) + \frac{\partial C}{\partial S}(t, f(t, y)) \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) \\ \star \frac{\partial g}{\partial y}(t, y) &= \frac{\partial C}{\partial S}(t, f(t, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \\ \star \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, y) &= \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, f(t, y)) \left[\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right]^2 + \frac{\partial C}{\partial S}(t, f(t, y)) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y) \end{aligned}$$

On en déduit les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \star \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) &= \frac{\partial C}{\partial t}(t, f(t, y)) + \mu f(t, y) \frac{\partial C}{\partial S}(t, f(t, y)) \\ \star \frac{\partial g}{\partial y}(t, y) &= \frac{\partial C}{\partial S}(t, f(t, y)) \sigma f(t, y) \\ \star \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, y) &= \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, f(t, y)) \sigma^2 f^2(t, y) + \frac{\partial C}{\partial S}(t, f(t, y)) \sigma^2 f(t, y) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème d'Îto au prix de l'option $C(t, S_t) = g(t, W_t)$, on obtient :

$$dC_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, W_t)dt + \frac{\partial g}{\partial y}(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, W_t)dt$$

or pour $y = W_t$ on a $f(t, y) = f(t, W_t) = S_t$ d'où

$$\begin{aligned} dC_t &= \left[\frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) \right] dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) dW_t + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) \sigma^2 S_t \right] dt \\ &= \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) \left[(\mu S_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t) dt + \sigma dW_t \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 dt \end{aligned}$$

Or on a $dS_t = (\mu S_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t) dt + \sigma dW_t$ donc :

$$dC_t = \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S_t) dt$$

Cette équation représente la variation du prix de l'option entre t et $t + dt$

On définit les sensibilités de l'option comme suit :

- ★ $\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t)$: sensibilité de la valeur de l'option par rapport au temps.
- ★ $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t)$: sensibilité de l'option par rapport au cours du sous-jacent.
- ★ $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S_t) = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$: convexité de l'option par rapport au sous-jacent.

On remplaçant ces valeurs dans l'équation précédente, on obtient :

$$dC_t = \Theta dt + \Delta dS_t + \frac{1}{2} \Gamma \sigma^2 S_t^2 dt$$

3.4 Stratégie Δ -neutre

Une stratégie dite " Δ -neutre" aura pour objectif de réaliser un portefeuille possédant une sensibilité Δ quasi nulle, permettant ainsi d'être peu sensible aux petites fluctuations du sous-jacent.

On considère alors un portefeuille $(\phi(t), \psi(t))$ inscrit dans une stratégie dynamique et autofinçante où ϕ est la quantité d'actifs dans laquelle on investit et ψ la quantité de numéraire (actif sans risque de taux d'intérêt r). La valeur, en t de ce portefeuille est :

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t \beta_t$$

Le caractère autofinçant de cette stratégie est un élément extrêmement important car cela signifie que les variations dans la valeur du portefeuille V_t ne résultent que de la variation des cours des actifs :

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t d\beta_t$$

Le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage implique en particulier que tout placement à rendement non aléatoire doit avoir un rendement égal au taux d'intérêt (le numéraire) :

Si V_t est la valeur d'un portefeuille d'une stratégie autofinçante, alors

$$dV_t = r V_t dt.$$

3.5 Stratégie de réplication

Observons maintenant une stratégie de réplication de l'option à l'aide du portefeuille réalisé. A la maturité, la valeur de notre portefeuille est strictement égale à celle de notre option, ce qui signifie, par absence d'opportunité d'arbitrage, qu'elles sont égales à tout instant : $C_T = V_T \Rightarrow C_t = V_t = \phi_t S_t + \psi_t \beta_t$ donc cela implique le même raisonnement pour les incréments :

$$dC_t = dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t d\beta_t$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) dt + \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) S_t \sigma dW_t + \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) S_t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S_t) dt \\ & = \\ & \phi_t S_t \sigma dW_t + \phi_t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t dt + \psi_t r \beta_t dt \end{aligned}$$

En identifiant les termes facteurs de dW_t , on peut déduire la condition nécessaire à la stratégie Δ -neutre : $\phi_t = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t)$

La stratégie Δ -neutre est telle que $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) = 0$ à tout instant ; de cette manière, notre portefeuille est insensible aux variations de l'actif S_t . En cherchant à éliminer la composante Δ de l'expression de C_t , on obtient la valeur de la quantité d'actif sous-jacent ϕ_t à utiliser pour protéger le portefeuille du risque lié à cet actif.

Considérons maintenant un portefeuille constitué d'une position courte dans l'option et d'une position longue dans le portefeuille, la valeur en t de cette stratégie est $U_t = V_t - C_t = \phi_t S_t + \psi_t \beta_t - C_t$ d'où :

$$\begin{aligned} dU_t &= dV_t - dC_t = \phi_t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t dt + \psi_t r \beta_t dt - \frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) dt - \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) dS_t - \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t, S_t) dt \\ &= \left[r \psi_t \beta_t - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] dt \end{aligned}$$

On note que le rendement du portefeuille Δ -neutre ne comporte pas de termes aléatoires (dW_t), il est donc prévisible. Par absence d'opportunité d'arbitrage, ce rendement doit aussi être égal au taux d'intérêt du numéraire : $d\beta_t = r \beta_t dt$ donc $dU_t = r U_t dt$

$$dU_t = r U_t dt \Leftrightarrow r \psi_t \beta_t - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = r(\phi_t S_t + \psi_t \beta_t - C_t)$$

avec $\phi_t = \frac{\partial C}{\partial S}$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S} - r C(t, S_t) = 0$$

Ce qui définit l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes.

4 Résolution de l'EDP de Black-Scholes

4.1 Equation de la chaleur

On effectue un changement de variable :

$$\begin{aligned}\tau &= T - t \in [0, T] \\ x &= \ln(S) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)\end{aligned}$$

d'où $S = e^{x - (\frac{\sigma^2}{2})\tau}$

et $C(t, S) = e^{-r\tau}u(\tau, x) = e^{-r(T-t)}u(T - t, \ln(S) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t))$

On est alors en mesure de calculer les dérivées partielles de $C(t, S)$ pour les injecter dans l'EDP de Black-Scholes :

$$\begin{aligned}\star \frac{\partial C}{\partial t} &= r e^{-r\tau}u(\tau, x) - e^{-r\tau} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) - e^{-r\tau} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \star \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{1}{S} e^{-r\tau} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \star \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S^2} e^{-r\tau} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{S^2} e^{-r\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r S_t \frac{\partial C}{\partial S} - r C(t, S_t) = 0$$

\Leftrightarrow

$$e^{-r\tau} \left[r u(\tau, x) - \frac{\partial u}{\partial \tau} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + r \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r u(\tau, x) \right] = 0$$

En simplifiant, on obtient une équation aux dérivées partielles parabolique du type "Equation de la chaleur" :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, \tau) \quad \tau \in [0, T]$$

Mais une équation aux dérivées partielles ne se résoud complètement que si elle est munie d'une condition finale (condition de Cauchy). On définit donc la fonction $H(x)$ comme le payoff final de l'option : $u(x, \tau = 0) = h(e^x) = H(x)$

La condition terminale dépend du type d'option étudiée :

- Contrat à terme : $h(x) = x - K \Rightarrow H(x) = e^x - K$
- Option d'achat (Call) : $h(x) = (x - K)^+ \Rightarrow H(x) = (e^x - K)^+$
- Option de vente (Put) : $h(x) = (K - x)^+ \Rightarrow H(x) = (K - e^x)^+$

La solution générale s'écrit :

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} H(y) dy$$

où $\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \sim N(x, \sigma^2\tau)$ est la fonction de densité d'une loi normale

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy = 1$

4.2 Solutions particulières

Contrat à terme

$$H(x) = e^x - K$$

$$\begin{aligned}
 u(\tau, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} (e^y - K) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau} + y}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[y^2 - 2(x+\sigma^2\tau)y + x^2]}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[(y - (x+\sigma^2\tau))^2 + x^2 - (x+\sigma^2\tau)^2]}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau}[(y - (x+\sigma^2\tau))^2 - \sigma^4\tau^2 - 2x\sigma^2\tau]}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \\
 &= e^{\frac{1}{2}\sigma^2\tau + x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(y - (x+\sigma^2\tau))^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \\
 &= e^{\frac{1}{2}\sigma^2\tau + x} - K
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(t, S) &= e^{-r(T-t)} u(\tau, x) \\
 &= e^{-r(T-t)} u((T-t), x = \ln(S) + (x - \frac{\sigma^2}{2})(T-t))
 \end{aligned}$$

$$C(t, S) = S - Ke^{-r(T-t)}$$

on définira alors les sensibilités :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = 1$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = 0$$

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = rKe^{-r(T-t)}$$

Option d'achat : Call

$$H(x) = (e^x - K)^+$$

$$H(x) = 0 \text{ pour } x < \ln(K)$$

$$\begin{aligned} u(\tau, x) &= \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} (e^y - K) dy \\ &= \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau} + y}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy \\ &= \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau} [y^2 - 2(x+\sigma^2\tau)y + x^2]}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy \\ &= \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau} [(y - (x+\sigma^2\tau))^2 + x^2 - (x+\sigma^2\tau)^2]}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy \\ &= \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau} [(y - (x+\sigma^2\tau))^2 - \sigma^4\tau^2 - 2x\sigma^2\tau]}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy \\ &= e^{\frac{1}{2}\sigma^2\tau + x} \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(y - (x+\sigma^2\tau))^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy - K \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy \end{aligned}$$

On définit $Z \sim N(0,1)$ $N(u) = P[Z \leq u] = \int_{-\infty}^u \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$
 et $N(-u) = 1 - N(u)$

donc :

$$\begin{aligned} \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(y - (x+\sigma^2\tau))^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy &= P[x + \sigma^2\tau + \sigma\sqrt{\tau}Z \geq \ln(K)] \\ &= P[Z \geq \frac{\ln(K) - (x + \sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}] \\ &= 1 - N\left(\frac{\ln(K) - (x + \sigma^2\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\ \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} dy &= P[x + \sigma\sqrt{\tau}Z \geq \ln(K)] \\ &= P[Z \geq \frac{\ln(K) - x}{\sigma\sqrt{\tau}}] \\ &= 1 - N\left(\frac{\ln(K) - x}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} C(t, S) &= e^{-r(T-t)} u(\tau, x) \\ &= e^{-r(T-t)} u((T-t), x = \ln(S) + (x - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)) \\ &= e^{-r(T-t)} [S e^{r(T-t)} N\left(\frac{\ln(S) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma^2(T-t) - \ln(K)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - K N\left(\frac{\ln(S) - \ln(K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)] \\ &= S N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - K e^{-r(T-t)} N\left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned}$$

On pose :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{donc } d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

On en déduit la formule de Black-Scholes :

$$C(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Posons $n(u) = N'(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$

$$n(d_1) = n(d_2)e^{-\frac{\sigma^2\tau}{2} - d_2\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$= n(d_2)e^{-\frac{\sigma^2\tau}{2}}e^{-\ln(\frac{S}{K}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}$$

$$= n(d_2)\frac{K}{S}e^{-r\tau}$$

On définira alors les sensibilités :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{Ke^{-r(T-t)}n(d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$= N(d_1) + \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} [Se^{-\frac{\sigma^2\tau}{2} - d_2\sigma\sqrt{\tau}}]$$

$$= N(d_1) + \frac{n(d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}} [S\frac{K}{S}e^{-r(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}]$$

$$= N(d_1)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = n(d_1) \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Option de vente : Put

$$H(x) = (K - e^x)^+$$

On utilise la formule de la parité Call-Put : $C(t, S) - P(t, S) = S - Ke^{-r(T-t)}$
qui nous permet d'obtenir :

$$P(t, S) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

$$\Delta = N(d_1) - 1$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

5 Programme C++ d'évaluation d'options européennes

5.1 Modèle à implémenter

Considérons l'évolution d'un actif financier versant des dividendes et dont le cours suit la dynamique suivante :

$$dS(t) = (\mu - d)S(t)dt + \sigma S(t)dW_t$$

- $S(t)$: Valeur de l'actif à la date t
- μ : Tendence de l'actif
- d : Taux de dividende de l'actif
- σ : Volatilité de l'actif
- dt : Espace de temps entre 2 observations de $S(t)$
- W_t : Mouvement brownien standard $W_t \sim N(0,t)$

Le modèle d'évaluation des options de Black et Scholes permet aux investisseurs de déterminer la valeur d'une option européenne à l'aide des données de marché :

| | |
|-------------|---|
| Call | $C(t, S(t), T, K, \sigma) = S(t)e^{-d(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$ |
| Put | $P(t, S(t), T, K, \sigma) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(t)e^{-d(T-t)}N(-d_1)$ |

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - d + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

$$Z \sim N(0,1) \quad N(u) = P[Z \leq u] = \int_{-\infty}^u \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \quad N(-u) = 1 - N(u)$$

- $C(t, S(t), T, K, \sigma)$: Valeur de l'option d'achat en t
- $P(t, S(t), T, K, \sigma)$: Valeur de l'option de vente en t
- $S(t)$: Valeur de l'actif sous-jacent
- K : Strike de l'option (prix d'exercice)
- T : Maturité de l'option
- r : Valeur du taux d'intérêt sans risque
- d : Valeur du taux de dividende de l'actif

On définit ainsi la valeur d'une option d'achat $C(t, S(t), T, K, \sigma)$ de maturité T , de strike K et dont l'actif contingent est S . A la date T , le détenteur de l'option *call* pourra acheter l'actif S au prix K ; dans la pratique, on admettra que le payoff de l'option est $C(T, S(T), T, K, \sigma) = \text{Max}(S(T) - K, 0)$.

| Valeur de l'actif | Nature de l'option | Payoff de l'option |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| $S(t) < K$ | hors de la monnaie | 0 |
| $S(t) > K$ | dans la monnaie | $S(t) - K$ |

5.2 Volatilité implicite

La volatilité de l'actif contingent σ est bien plus qu'un simple paramètre du modèle car il s'agit également de l'élément avec lequel les traders effectuent leurs transactions; les options sont, dans la pratique, cotées à l'aide de la volatilité implicite. La volatilité implicite est définie comme la valeur de σ qui égalise la valeur de marché observée pour l'option C_{obs} et la valeur obtenue par la formule d'évaluation du modèle de Black et Scholes $C(t, S(t), T, K, \sigma)$.

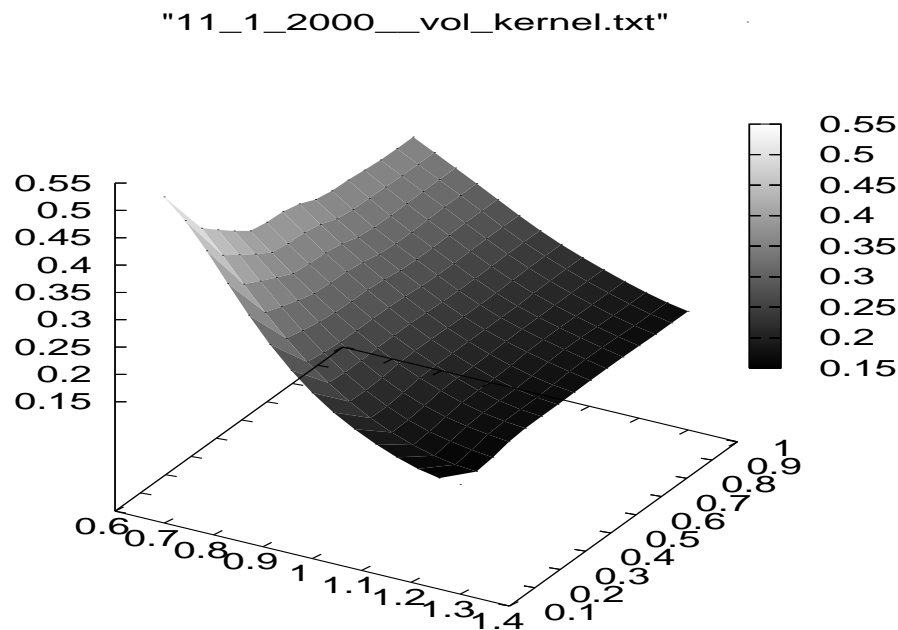
$$\exists! \sigma_t(K, T) > 0, \quad C(t, S(t), T, K, \sigma_t(K, T)) \simeq C_{obs}$$

L'existence et l'unicité de σ viennent du fait que la fonction $C(\sigma_t(K, T))$ est monotone de $[0, +\infty[$ vers $]0, S(t) - Ke^{-r(T-t)}]$. Pour un couple (K, T) fixé, $\sigma_t(K, T)$ suit généralement un processus stochastique; pour une valeur de t fixée, la volatilité implicite dépend des caractéristiques de l'option comme sa maturité T et son strike K .

La fonction $\sigma_t : (K, T) \rightarrow \sigma_t(K, T)$ est appelée **surface de volatilité implicite** (ou smile). Dans la pratique, l'utilisation de la moneyness de l'option $m = K/S(t)$ permet de représenter la surface de volatilité avec des coordonnées relatives. Enfin, si on définit $\tau = T - t$, on aboutit à la définition de la surface de volatilité implicite telle qu'elle sera étudiée dans ce rapport : $\sigma_t(\tau, m)$.

L'objectif de ce projet est d'implémenter la méthode numérique des moindres carrés ordinaires afin d'obtenir a valeur de $\tilde{\sigma}$ qui vérifie :

$$\tilde{\sigma} = \operatorname{argmin}_{\sigma \in \mathbb{R}} [C(t, S(t), T, K, \sigma) - C_{obs}]^2$$



5.3 Estimation avec données réelles

On choisit de réaliser un programme en langage C++ afin de pouvoir utiliser les fonctionnalités de plusieurs bibliothèques : la librairie GSL permet de réaliser des calculs d'algèbre linéaire et d'optimisation, les fonctions de Gnuplot servent à afficher des graphiques, des courbes et des histogrammes, les méthodes de la bibliothèque STL permettent de gérer efficacement le stockage des données dans des listes chaînées. L'utilisation du C++ simplifie également la lecture des fichiers sources et la sauvegarde des données calculées ; on pourra enfin penser à étendre le programme en y ajoutant de nouvelles fonctionnalités : lecture et écriture dans une base de données (bibliothèque DTL), interface graphique soignée (QT)...

Le programme à réaliser devra donc récupérer les données nécessaires à la valorisation des options, en déduire le prix théorique de celles-ci selon le modèle de Black et Scholes et enfin utiliser la méthode des moindres carrés ordinaires pour déterminer la valeur de $\tilde{\sigma}$. L'ensemble de ces calculs devra être effectué pour chaque option observée, on obtiendra ainsi un ensemble de valeurs de volatilité implicite que l'on tracera sur un graphique. Il sera enfin possible de réaliser ces calculs pour un ensemble de jours d'observation, on pourra alors étudier l'évolution du smile de volatilité dans le temps.

Les données de marché observées et nécessaires à la réalisation des calculs sont décrits dans le tableau ci-dessous, ces valeurs constituent une observation du marché à une date donnée et sont stockées dans des fichiers :

| liste des options | données générales |
|--|------------------------------------|
| Type (Call/Put) | |
| Maturité ($T - t$) | Valeur de marché de l'actif $S(t)$ |
| Strike K | |
| Valeur de marché de l'option C_{obs} | Courbe des taux (r) |
| Volatilité σ | |

On se propose d'utiliser les observations de marché des options indicée sur l'ESX (Essex Resource Corporation).

5.3.1 Structures

La première étape du développement consiste à réfléchir sur la structure du programme, l'agencement des données et la manière la plus optimale de stocker l'ensemble de valeurs nécessaires. On commence donc par définir un ensemble de classe contenant les différentes valeurs gérées par le programme.

| Classe TAUX | | |
|---------------------------|----------------------|-------------------------|
| variable de classe | détermination | type de variable |
| Taux | observé | flottant (%) |
| Maturité | observée | fraction d'année |

Un objet du type **Taux** est une observation à une date donnée de la valeur d'un taux pour un investissement d'une maturité donnée.

| Classe OPTION | | |
|--|---------------------------|-------------------------|
| variable de classe | détermination | type de variable |
| Type | observé | Call=0 / Put=1 |
| Maturité ($T - t$) | observée | fraction d'année |
| Strike K | observé | nombre flottant |
| Valeur de marché de l'option C_{obs} | observé | nombre flottant |
| Taux d'intérêt r | calculé (courbe des taux) | nombre flottant (%) |
| Taux de dividende d | calculé (Parité Call/Put) | nombre flottant (%) |
| Volatilité σ | observée | nombre flottant (%) |
| Volatilité implicite $\tilde{\sigma}$ | calculée (MCO) | nombre flottant (%) |
| Valeur du sous-jacent $S(t)$ | observée | nombre flottant |

Un objet du type **Option** est une observation à une date donnée de la valeur de marché d'une option européenne indiquée sur un sous-jacent précis.

| Classe GREEK | | |
|---------------------------|---|-------------------------|
| variable de classe | détermination | type de variable |
| Type | observé | Call=0 / Put=1 |
| Maturité ($T - t$) | observée | fraction d'année |
| Moneyness = $K/S(t)$ | observé | nombre flottant |
| Delta | calculée $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$ | nombre flottant |
| Theta | calculée $\Theta = \frac{\partial C}{\partial T}$ | nombre flottant |
| Gamma | calculée $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ | nombre flottant |
| Vega | calculée $v = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$ | nombre flottant |
| Rho | calculée $\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$ | nombre flottant |

Un objet du type **Greek** est une observation à une date donnée de l'ensemble des sensibilités d'une option. Les grecques sont un ensemble de dérivées du prix de l'option par rapport à certaines variables, ce qui permet de mesurer la sensibilité de l'option aux variations de ces variables.

| Classe VOL | | |
|---------------------------|----------------------|-------------------------|
| variable de classe | détermination | type de variable |
| Volatilité σ | calculée | nombre flottant (%) |
| Maturité $\tau = (T - t)$ | calculée | fraction d'année |
| Moneyness $m = K/S(t)$ | calculée | nombre flottant |

Un objet du type **Vol** est une observation à une date donnée de la volatilité pour une maturité et une moneyness données. A chaque couple (τ, m) correspond donc une valeur de σ .

5.3.2 Listes STL

Une fois que chaque objet a été correctement défini, il est ensuite nécessaire de les stocker efficacement et logiquement dans une structure pouvant les regrouper. On fait alors appel aux liste chaînées de la bibliothèque STL :

| Classe LISTE TAUX | | |
|---------------------------|-------------------------------|--------------------|
| variable de classe | contenu | description |
| list<Taux> | liste STL d'objet Taux | Courbe des taux |

Un objet du type **Liste Taux** est une observation à une date donnée de la courbe des taux d'un jour spécifique. Cet objet contient une liste STL d'objets du type **Taux** ordonnés par maturité croissante.

| Classe LISTE OPTION | | |
|----------------------------|---------------------------------|---|
| variable de classe | contenu | description |
| list<Option> | liste STL d'objet Option | Ensemble des options cotées sur le marché |

Un objet du type **Liste Option** est une observation à une date donnée de l'ensemble des options cotées sur le marché pour un même sous-jacent pour un jour spécifique. Cet objet contient une liste STL d'objets du type **Option** ordonnés par maturité, puis par strike.

| Classe LISTE GREEK | | |
|---------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| variable de classe | contenu | description |
| list<Greek> | liste STL d'objet Greek | Ensemble des grecques des options |

Un objet du type **Liste Greek** est une observation à une date donnée de l'ensemble des valeurs des sensibilités des options cotées sur le marché pour un même sous-jacent pour un jour spécifique. A chaque element **Option** de la liste **Liste Option** correspond un element **Greek** de la liste **Liste Greek** qui contient tous les grecques de l'option. Cet objet contient une liste STL d'objets du type **Option** ordonnés par maturité, puis par strike.

| Classe LISTE VOL | | |
|---------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| variable de classe | contenu | description |
| list<Vol> vol | liste STL d'objet Vol | Surface de volatilité observée |
| list<Vol> vol-kernel | liste STL d'objet Vol | Surface de volatilité lissée |

Un objet du type **Liste Vol** est une observation à une date donnée du smile de volatilité. Cette liste représente en fait la surface de volatilité car à chaque couple (τ, m) correspond une valeur de σ , on obtient alors une surface en 3D. La première liste contient les valeurs de volatilités calculées d'après les données observées dans la liste **Liste Option** (les valeurs de maturité et de moneyness sont simplement déduites de celles contenues dans la liste d'options) ; la seconde liste contient un ensemble de valeurs de volatilité pour une grille fixe de couple (τ, m) (les valeurs de maturité et de moneyness sont calculées, et non observées, de manière à posséder une grille fixe). Les valeurs de volatilité correspondantes sont en fait calculées par lissage (méthode du noyau) à partir de la liste **Liste Vol** précédente. Chaque liste contient une liste STL d'objets du type **Vol** ordonnés par maturité, puis par moneyness.

Nous sommes désormais en mesure de rassembler l'ensemble de ces information de manière à posséder un objet regroupant l'observation du marché à une date donnée.

| Classe DATA | | |
|---------------------------|----------------|---|
| variable de classe | contenu | description |
| Liste-Taux* l-taux | pointeur | courbe des taux du jour |
| Liste-Option* l-option | pointeur | ensemble des options côtés |
| Liste-Greek* l-greek | pointeur | ensemble des sensibilités des options côtés |
| Liste-Vol* l-vol | pointeur | Courbes de volatilité implicite |

Un objet du type **Data** est une observation à une date donnée du marché, il regroupe la courbe des taux du jour, l'ensemble des options côtés ainsi que leurs sensibilités, et les surfaces de volatilité implicite (calculée et lissée). Un objet **Data** est en quelque sorte, un photographie du marché à un instant donnée.

Comme nous disposons d'un historique de données de marché, nous pouvons générer un ensemble d'objets **Data** pour chaque jour d'observation.

| Classe LISTE DATA | | |
|---------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| variable de classe | contenu | description |
| list<Data> | liste STL d'objet Data | Ensembles d'observations de marché |

Un objet du type **Liste Data** regroupe l'ensemble des calculs effectués pour chaque jour d'observation. Cet objet contient une liste STL d'objets du type **Data** ordonnés dans le temps.

5.3.3 Etapes de calculs

Cette section contient un rapide descriptif de l'activité du programme ; le lecteur pourra alors suivre l'évolution des calculs et comprendre dans quel ordre un objet **Data** est créé, complété et utilisé. Il est, bien entendu, évident que ces calculs se reproduisent pour chaque objet **Data** de la liste **Liste Data**.

Récupération de données

La première étape consiste à récupérer les données d'observation depuis un ensemble de fichiers. Pour chaque fichier, on crée alors un objet **Data** et l'on remplit les objets **Liste** qu'il contient avec les données du fichier : le document "taux" permet d'enregistrer la courbe des taux dans **Liste Taux** et le document "option" permet de remplir l'objet **Liste Option**.

Compléments aux variables de Option

Une fois les données d'observation stockées dans les différentes classes du programme, il nous faut compléter certaines structures avec les valeurs nécessaires au calcul de la volatilité implicite. Dans les objets **Option**, on commence par calculer la valeur du taux d'intérêt r par interpolation à la maturité grâce à la courbe des taux :

| date | taux |
|-------|-------|
| d_1 | t_1 |
| d_0 | ? |
| d_2 | t_2 |

$$t_0 = t_1 + \frac{(d_0 - d_1)(t_2 - t_1)}{(d_2 - d_1)}$$

La valeur du taux de dividende est ensuite calculée afin de compléter la structure *option* ; on utilise pour cela la relation de parité Call/Put :

$$C(t, S(t)) - P(t, S(t)) = S(t)e^{-d(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}$$

$$\Leftrightarrow d = -\frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{C(t, S(t)) - P(t, S(t)) + Ke^{-r(T-t)}}{S(t)}\right)$$

Ce qui nécessite qu'il existe, pour chaque Call, un Put de caractéristiques identiques (maturité, strike) ; la fonction doit donc inclure une boucle permettant de rechercher des options "complémentaires" (un Call et un Put de même maturité et de même strike).

Sensibilités des options : les grecques

L'ensemble des calculs des sensibilités des options est relativement facile, aussi nous nous contenterons de présenter les formules permettant de les calculer. :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - d + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \left| \begin{array}{l} \Delta_{\text{Call}} = N(d_1) \quad \Delta_{\text{Put}} = N(d_1) - 1 \\ \Theta_{\text{Call}} = -\frac{S(t)N'(d_1)\sigma e^{-dT}}{2\sqrt{T}} + dS(t)N(-d_1)e^{-dT} - rKe^{-rT}N(-d_2) \\ \Theta_{\text{Put}} = \frac{S(t)N'(d_1)\sigma e^{-dT}}{2\sqrt{T}} - dS(t)N(-d_1)e^{-dT} + rKe^{-rT}N(-d_2) \\ \rho_{\text{Call}} = KT e^{-rT}N(d_2) \quad \rho_{\text{Put}} = -KT e^{-rT}N(-d_2) \\ \Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-dT}}{S(t)\sigma\sqrt{T}} \\ v = S(t)\sqrt{T}N'(d_1)e^{-dT} \end{array} \right.$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$N(u) = \int_{-\infty}^u \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

$$N(-u) = 1 - N(u)$$

$$Z \sim N(0,1)$$

Volatilité implicite

L'évaluation de la volatilité implicite constitue l'objectif principal du programme. Un ensemble de méthodes de la bibliothèque GSL permet de réaliser une optimisation de fonction à plusieurs variables du type **Minimisation des moindres carrés non linéaire** (nonlinear least-squares fitting). Cette bibliothèque fournit une large gamme de type de solveurs, de méthodes itératives et de tests de convergence; chaque élément de la méthode étant totalement indépendant des autres, il est alors possible de les changer et d'observer les conséquences sur la solution obtenue (on peut changer de test de convergence, et voir si le résultat obtenu est plus précis).

Un problème d'optimisation non-linéaire par les moindres carrés consiste à minimiser le carré des résidus de n fonctions f_i , selon p paramètres x_i :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n)^2 = \frac{1}{2} \|F(x)\|^2$$

Tous les algorithmes agissent à partir d'une hypothèse initiale commune utilisant la linéarisation:

$$\Psi(x) = \|F(x+p)\| \approx \|F(x) + Jp\|$$

où x est la valeur initiale, p est le pas et J est la matrice Jacobienne: $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

L'objectif est ici de trouver la valeur optimale de $\tilde{\sigma}$ qui minimise le carré de la fonction $f(\tilde{\sigma}) = [C(t, S(t), T, K, \sigma) - C_{obs}]$ où C_{obs} est la valeur de l'option observée sur le marché et $C(t, S(t), T, K, \sigma)$ la valeur calculée avec le modèle de Black et Scholes.

Pour utiliser ces méthodes, il suffit de fournir au code l'expression de la fonction erreur, mais également la dérivée de celle-ci par rapport à la variable à optimiser. Dans la pratique, la fonction à minimiser s'obtient facilement à l'aide des méthodes de valorisation d'option de Black et Scholes ainsi que grâce au prix de marché observé; la dérivée de cette fonction se déduit de l'expression de **Vega** qui est la sensibilité du prix de l'option aux variations de σ .

La fonction fait donc varier la valeur de σ et recalcule celle de $f(\sigma)$; la procédure de minimisation continue tant qu'un minimum n'a pas été trouvé dans les conditions de précisions données (test du gradient) ou bien que le nombre d'itérations maximum autorisé n'est pas atteint.

Au terme de cette procédure, on obtient pour chaque couple de valeur de maturité et de moneyness, une volatilité implicite propre: $(\tau, m) \rightarrow \sigma$, on peut alors tracer une surface de volatilité en 3 dimensions.

Methode du noyau

Une fois que l'ensemble des valeurs de volatilité implicite a été calculé, on se rend compte que les couples (τ, m) ne sont pas constants d'une journée à l'autre puisqu'ils sont directement déterminés grâce aux observations des options. La surface de volatilité évolue donc dans le temps sur une grille non-fixe, le nombre de valeurs n'est pas constant, l'échelle n'est pas fixe; il est donc relativement difficile d'étudier l'évolution de cette surface dans le temps. De plus, on observe certaines valeurs "extremes" ainsi que des valeurs manquantes, la surface n'est donc pas complète, elle est irrégulière et grossière.

La méthode du noyau (Kernel smoothing method) permet tout d'abord de lisser un ensemble de valeurs contenues (par exemple) dans un vecteur. Un avantage non négligeable à considérer est que les valeurs $\hat{\sigma}$ lissées sont calculées pour des couples (τ, m) données par l'utilisateur; on n'est donc pas obligés de prendre les valeurs observées. Cela permet de créer une grille fixe, complete et constante.

On dispose d'un ensemble de valeurs de volatilité pour un couple maturité/moneyness donné $\sigma(\tau, m)$ permettant de tracer une surface que l'on souhaite lisser; pour cela on utilise une méthode du noyau (Nadaraya-Watson). On peut alors approximer σ par $Moy[\sigma_i; (\tau_i, m_i) \in V(\tau, m)]$ où $V(\tau, m)$ est un voisinage de (τ, m) (on choisit une moyenne mobile locale pondérée, pour laquelle les observations dont l'abscisse est plus proche de (τ, m) ont un poids plus élevé que celles qui en sont éloignées). Ceci conduit directement à l'estimateur du noyau de Nadaraya-Watson:

$$\hat{\sigma}(\tau, m) = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_i K\left(\frac{\tau_i - \tau}{h_\tau}\right) \sum_{i=1}^n K\left(\frac{m_i - m}{h_m}\right)}{\sum_{i=1}^N K\left(\frac{\tau_i - \tau}{h_\tau}\right) \sum_{i=1}^n K\left(\frac{m_i - m}{h_m}\right)}$$

où $K(t)$ est appelé **noyau**; il s'agit généralement d'une loi de probabilité:

| | |
|----------------------|-------------------------------------|
| Noyau uniforme | $K(t) = \frac{1}{2}$ |
| Noyau Gaussien | $K(t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2}$ |
| Noyau d'Epanechnikov | $K(t) = \frac{3}{4}(1 - t^2)$ |
| Noyau cubique | $K(t) = \frac{70}{81}(1 - t ^3)^3$ |

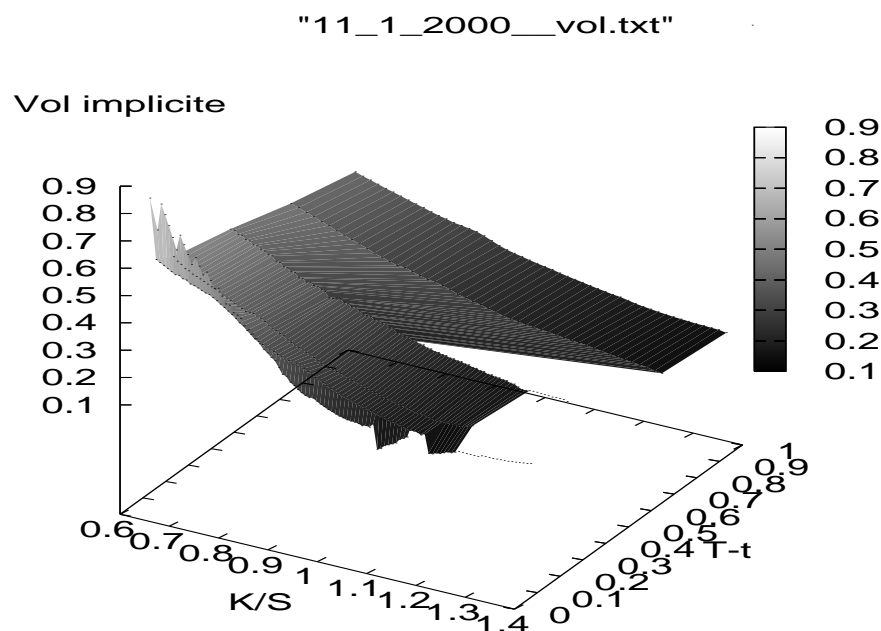
La largeur de fenêtre h (bandwidth) contrôle le caractère local de la régression: une petite largeur de fenêtre donne en général une estimation très bruitée, alors qu'une grande largeur de fenêtre produit une courbe relativement lisse, mais moins sensible aux aspects locaux éventuellement présents dans les données avec donc un plus grand biais. Dans la pratique, on choisit pour valeur $h = \sigma N^{-1/5}$. On notera que la largeur de fenêtre est différente pour les valeurs de τ et celles de m car elle dépend de l'écart-type des valeurs et de leur nombre.

6 Etude des résultats

Cette partie du rapport est destinée à l'étude des résultats obtenus par le programme. L'objectif principal étant l'étude de la surface de volatilité implicite, nous nous attarderons principalement sur cette dernière même si le programme permet également d'observer l'évolution des sensibilités des options, de leur prix, et même de la courbe des taux. Des modifications ultérieures pourraient ainsi permettre de changer ce programme en automate de trading back-testé où l'on pourrait définir une stratégie en fonction du smile de volatilité mais aussi des grecques.

6.1 Smile de volatilité implicite

On commence par étudier la surface de volatilité obtenue à partir des valeurs calculées directement par inversion du modèle de Black et Scholes (à l'aide des observations de marché). L'insuffisance du modèle est démontrée par le fait que la surface de volatilité implicite n'est pas plate; en effet, si le modèle était totalement juste, alors l'ensemble des valeurs de marché des options (de même sous-jacent) permettrait de retrouver une seule et unique valeur de σ pour un même couple (τ, m) . Malheureusement, on observe une structure par terme de la surface du smile, il existe donc une multitude de valeurs de σ , associée à un sous-jacent, pour chaque option observée sur le marché.

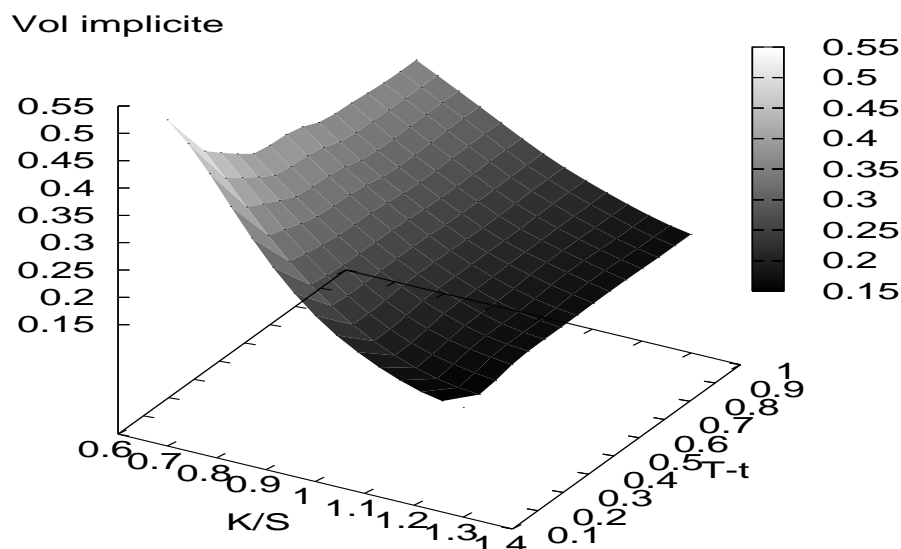


On remarque que certaines zones de la surface de volatilité sont lacunaires, cette absence de valeur s'explique par le fait que la fonction d'optimisation n'a pu converger. Il semble donc que les valeurs caractéristiques des options observées (principalement le prix) ne permettent pas toujours de faire aboutir la fonction de minimisation des moindres carrés. On observe uniquement ce phénomène pour les options hors de la monnaie ; leur absence de liquidité et les réactions du marché provoquent l'apparition de valeurs qui ne s'inscrivent pas dans la logique du modèle de Black et Scholes. On observe également des valeurs aberrantes pour les options de très faible maturité (volatilité très forte des options à la monnaie et très faible pour celles hors de la monnaie). La aussi, on peut se demander si les valeurs de marché observées sont en adéquation avec le modèle utilisé.

Globalement, on observe une nette diminution de la volatilité des options à mesure qu'elles entrent dans la monnaie. On constate également que la volatilité implicite augmente à mesure que l'option s'approche de sa maturité.

L'utilisation de la surface lissée (obtenue à l'aide de la méthode du noyau) permet tout d'abord d'observer l'évolution du smile de volatilité sur une grille (τ, m) fixe, mais aussi de combler les zones lacunaires. Cette méthode permet également d'atténuer certaines valeurs extrêmes. L'observation de la surface ainsi lissée permet simplement de confirmer les observations déjà faites avec le smile "brut".

"11_1_2000__vol_kernel.txt"

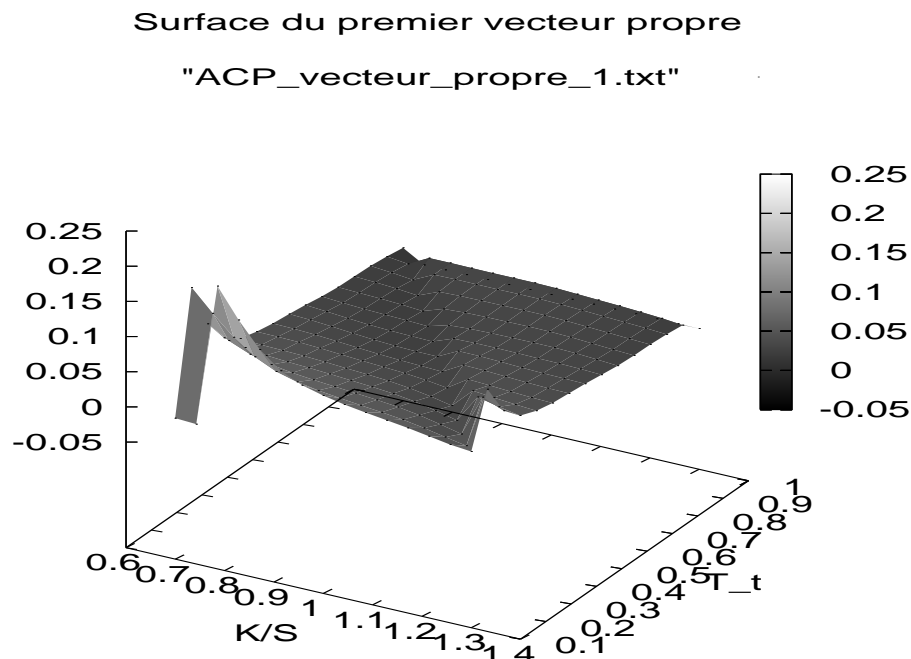


6.2 Analyse en composantes principales (ACP)

L'ACP permet d'étudier l'ensemble des déformations que subit la surface dans le temps, mais également l'importance de leur influence sur l'évolution de cette surface. Concrètement, l'étude des trois principaux modes de déformation se fait à l'aide des 3 premiers vecteurs propres de la matrice de variance/covariance issue de la surface moyenne des accroissements de volatilité dans le temps. En étudiant les valeurs propres correspondantes, on se rend compte que les seules 3 premières valeurs propres suffisent à couvrir 98% de la trace de la matrice de variance/covariance. Un modèle correctement calibré avec un nombre restreint de facteurs pourrait suffire à simuler la surface car 3 modes de déformations suffisent à résumer l'ensemble de son évolution.

6.2.1 Premier mode de déformation

La quasi-totalité des composantes du premier vecteur propre sont positives ; il en résulte une translation vers le haut (augmentation de la volatilité) de l'ensemble de la surface de volatilité implicite. La valeur propre correspondant à ce mode est la plus grande et représente approximativement 90% de la trace, ce qui signifie que la translation est la principale déformation subie par le smile de volatilité, les autres déformations n'ont, en moyenne, que peu d'influence. La surface est pratiquement plane et la quasi-totalité de ses composantes se situent entre 0 et 0.05 ; ce qui signifie que la translation positive (vers le haut) est quasiment identique sur tous les points de la surface de volatilité et qu'elle est relativement faible. On observe, cependant, certaines valeurs "extrêmes" pour les options très proches de la maturité et fortement dans (et hors de) la monnaie.

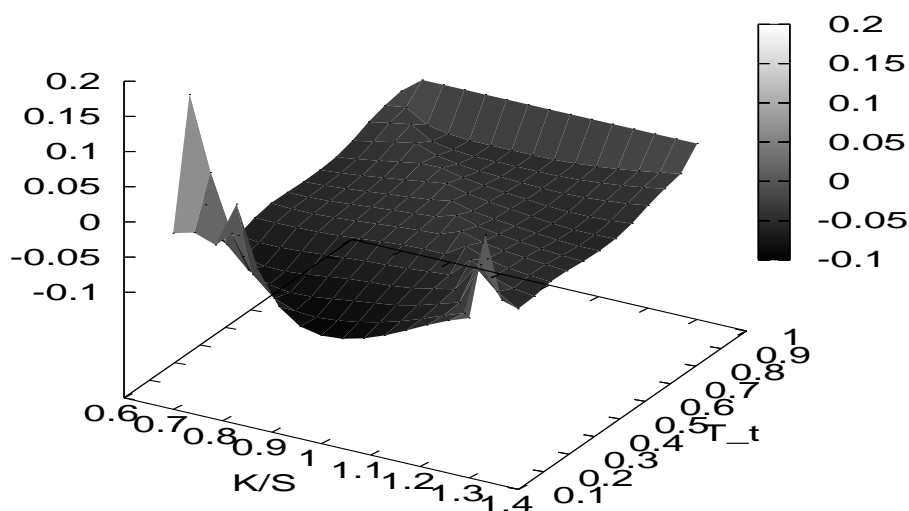


6.2.2 Second mode de déformation

Le second mode de déformation correspond à une surface croissante en fonction de la maturité; en effet ses composantes pour de faibles maturités sont négatives mais elles augmentent rapidement (et deviennent positives dès que la maturité dépasse 0.3, quelle que soit la moneyness). Sachant que le second mode de déformation correspond à la pentification de la surface, on traduit alors ce phénomène par une tendance à faire baisser le smile pour de très faibles maturités (pente négative); en revanche, la surface sera poussée vers le haut lorsque la maturité augmentera. On observe également un phénomène relativement discret qui tend à faire changer le signe de la surface en fonction de la moneyness: les composantes sont positives pour $m > 1$ et négatives pour $m < 1$; cela se traduira par une tendance à faire augmenter la volatilité des options Call hors de la monnaie, et à faire baisser celle des options Put hors de la monnaie. On observe également un ensemble de valeurs "extremes" pour de très faibles maturités et lorsque la moneyness est très faible ou très élevée. Ce phénomène, conjugué à celui observé précédemment sur le premier mode de déformation (pour le même type d'options) explique en grande partie l'observation de valeurs aberrantes de volatilités implicites pour les options proches de leur maturité et fortement dans (ou hors de) la monnaie. On rappelle que la valeur propre correspondant à ce mode est très inférieure (relativement à la trace) à celle du premier mode, ce qui signifie que l'importance de cette déformation (pentification) sur l'évolution dans le temps du smile de volatilité sera relativement plus faible que la déformation par translation.

Surface du second vecteur propre

"ACP_vecteur_propre_2.txt"

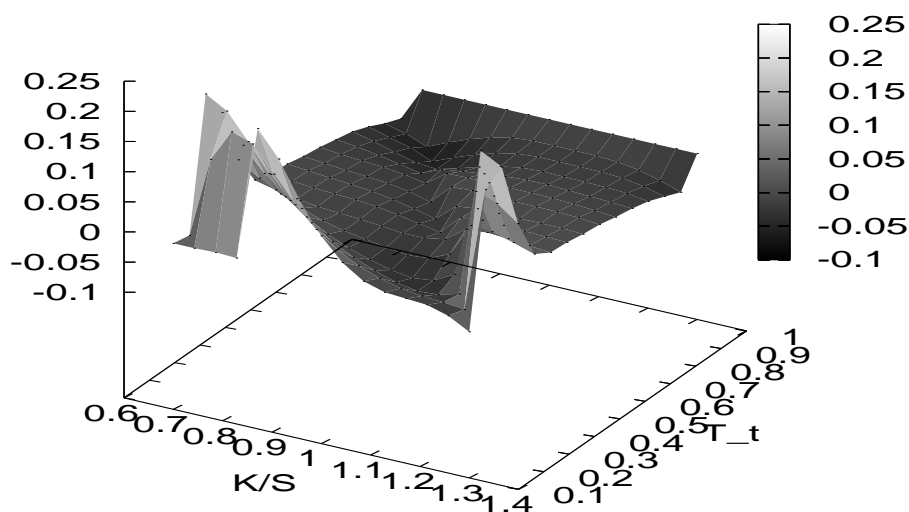


6.2.3 Troisième mode de déformation

Le troisième mode de déformation correspond à la troisième plus grande valeur propre qui demeure cependant nettement moins importante que les deux premières (représente moins de 1% de la trace); ce qui explique que cette déformation influence de manière relativement faible l'évolution de la surface de volatilité implicite. On constate que les composantes correspondant aux options de moneyness extrême (très grande ou très faible) et de maturité relativement faible (inférieur à 0.4) sont positives et beaucoup plus grandes que le reste des composantes. Le reste de la surface semble pratiquement plane, même si l'on remarque qu'elle décroît légèrement lorsque la maturité augmente (avec des composantes négatives pour une maturité supérieure à 0.9 quelle que soit la moneyness). Ce mode de déformation représente le changement de convexité de la surface de volatilité, on en conclue donc que le smile pour les options de faible maturité sera influencé par cette déformation.

Surface du troisième vecteur propre

"ACP_vecteur_propre_3.txt"



Dans l'ensemble des observations effectuées sur les modes de déformation de la surface de volatilité implicite, on constate que les valeurs correspondantes aux options fortement dans (ou hors de) la monnaie et proches de la maturité sont relativement importantes et se distinguent des autres composantes (elles ne semblent pas, en effet suivre la tendance générale) ; mais on constate également que c'est ce type d'options qui possède des valeurs de volatilité implicite les plus extrêmes et les moins stables. Il semble donc que ce type d'options soit le plus sensible aux modes de déformation décrits précédemment, et que l'instabilité de ces valeurs soit liée aux incertitudes du marché. Le fait que les composantes pour ce type d'options ne suivent pas la tendance générale montre que la déformation du smile pour ces options est très difficile à expliquer, les prix de marché observés sont peut-être illogiques et provoquent des résultats aberrants sur la surface de volatilité (et donc sur son évolution).

Les options très proches de la maturité ont une volatilité très importante, leurs sensibilités vis-à-vis des différents paramètres de valorisation sont très importantes, c'est pourquoi leur valeur de marché peut varier de manière importante. Ceci explique pourquoi la zone du smile correspondant à ces options semble être plus sensible aux modes de déformation et subir plus intensément les déformations décrites précédemment (translation, pentification et changement de convexité).

7 Conclusion

L'étude de l'évolution de la surface de volatilité implicite permet de mettre en évidence les failles du modèle de Black et Scholes. L'utilisation des valeurs de marché ne permet pas d'aboutir à une surface de volatilité plate. Cependant, une analyse en composantes principales de cette surface permet de résumer l'ensemble de ces déformations dans le temps à l'aide de 3 modes particuliers :

- Le premier mode de déformation correspond à une translation générale de la surface vers des valeurs supérieures.
- Le second mode de déformation reflète des mouvements opposés des volatilités des options Call et Put hors de la monnaie ainsi qu'une légère pentification positive générale de la surface lorsque la maturité augmente.
- Le troisième mode de déformation correspond à un changement de convexité de la surface qui est bien plus prononcé pour les options de faible maturité.

Ces trois modes permettent d'expliquer à eux seuls pratiquement 99% des types de déformation subis par le smile de volatilité. On constate cependant de nombreuses valeurs aberrantes ou "extrêmes" pour les options de très faible maturité qui possède visiblement des volatilités très importantes (pour les options dans la monnaie) ou bien lacunaires (pour des options hors de la monnaie qui sont très peu liquide). Ces valeurs ont tendance à biaiser les observations des déformations du smile, mais il apparaît malgré tout que la surface de volatilité pour ce type d'option soit la plus sensible aux modes de déformation.

En effet, les options dans la monnaie de très faible maturité ont des volatilité très importante, alors que celles hors de la monnaie et proches de la maturité sont peu liquides et donc faiblement volatiles. Dans les deux cas, le comportement des valeurs de marché ne semble pas suivre la logique générale et l'on se demande si le marché réagit logiquement dans ce type de cas car la fonction permettant de déduire la volatilité implicite ne converge pas toujours. Il apparaît donc que le modèle de Black et Scholes montre ses limites pour des options de très faible maturité, et que le comportement du marché ne s'inscrit pas dans la logique du modèle pour ces cas.